

Correction : Exercices d'applications (Calcul vectoriel dans le plan)

PROF : ATMANI NAJIB

Tronc CS

Exercice 1 : on considère les vecteurs :

$$\vec{U} = \vec{BC} - \vec{AC} - \vec{BA} + \vec{AB} \text{ et } \vec{V} = \vec{BE} + \vec{DF} + \vec{EF} + \vec{AB} + \vec{ED} + \vec{FA}$$

Simplifier les vecteurs : \vec{U} et \vec{V}

$$\text{Solution : } \vec{U} = \vec{BC} - \vec{AC} - \vec{BA} + \vec{AB} = \vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB} + \vec{AB}$$

$$\vec{U} = \vec{BA} + \vec{AB} + \vec{AB} = \vec{BB} + \vec{AB} = \vec{0} + \vec{AB} = \vec{AB}$$

$$\vec{V} = \vec{BE} + \vec{DF} + \vec{EF} + \vec{AB} + \vec{ED} + \vec{FA} = \vec{BE} + \vec{EF} + \vec{FA} + \vec{AB} + \vec{ED} + \vec{DF}$$

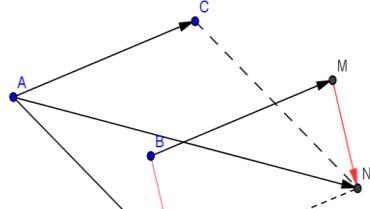
$$\vec{V} = \vec{BF} + \vec{FB} + \vec{EF} = \vec{BB} + \vec{EF} = \vec{0} + \vec{EF} = \vec{EF}$$

Exercice 2 : Soient A ; B ; C ; D des points du plan (P)

1) construire les points M et N tels que : $\vec{BM} = \vec{AC}$

$$\text{et } \vec{AN} = \vec{AC} + \vec{AD}$$

2) comparer les vecteurs \vec{BD} et \vec{MN}



Solutions : 1)

$$2) \vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN} = \vec{MB} + \vec{BA} + \vec{AC} + \vec{AD}$$

$$\vec{MN} = -\vec{BM} + \vec{BA} + \vec{AD} + \vec{AC} = -\vec{BM} + \vec{BD} + \vec{AC}$$

$$\text{Donc : } \vec{MN} = -\vec{AC} + \vec{BD} + \vec{AC} = \vec{BD}$$

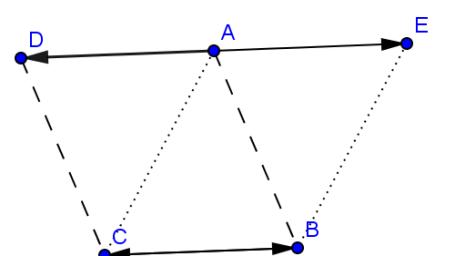
Exercice 3 : Soient A, B, C trois points du plan non alignés et on considère D et E du plan tel que :

$$\vec{AD} = \vec{BC} \text{ et } \vec{AE} + \vec{AD} = \vec{0}$$

1) Faire un schéma

2) Quelle est la nature du quadrilatère EACB justifier votre réponse

Réponse : 1) on a : $\vec{AE} + \vec{AD} = \vec{0}$ donc $\vec{AE} = -\vec{AD}$



$$2) \text{on a : } \vec{BC} = \vec{AD} \text{ et } \vec{AD} = -\vec{AE}$$

$$\text{donc } \vec{BC} = -\vec{AE} = \vec{EA}$$

Donc le quadrilatère EACB est un parallélogramme

Exercice 4 : Soit \vec{u} et \vec{v} et \vec{w} des vecteurs du plan et A, B,

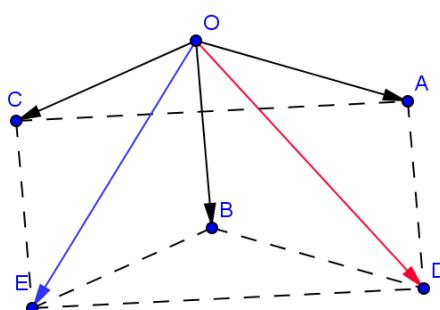
C, D, O, E des points du plan tel que : $\vec{u} = \vec{OA}$ et

$\vec{v} = \vec{OB}$ et $\vec{w} = \vec{OC}$ et $\vec{OD} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{OE} = \vec{v} + \vec{w}$

1) Faire une figure

2) Montrer que ACEB est un parallélogramme et justifier votre réponse

Réponse : 1)



$$2) \text{on a : } \vec{AD} = \vec{AO} + \vec{OD} = \vec{AO} + \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OB}$$

$$\text{donc } ① \vec{AD} = \vec{OB}$$

Et on a :

$$\vec{CE} = \vec{CO} + \vec{OE} = \vec{CO} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{CO} + \vec{OC} + \vec{OB} = \vec{OB} \text{ donc}$$

$$② \vec{CE} = \vec{OB}$$

D'après ① et ② on a : $\vec{AD} = \vec{CE}$

Donc : ACEB est un parallélogramme

Exercice 5 : Soit ABCD est un parallélogramme ;

on pose : $\vec{AB} = \vec{i}$ et $\vec{AC} = \vec{j}$

écrire les vecteurs \vec{AD} et \vec{BD} en fonction de \vec{i} et \vec{j}

Réponse : ABCD est un parallélogramme donc :

$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC} \text{ alors } \vec{AD} = \vec{AC} - \vec{AB} = \vec{j} - \vec{i}$$

$$\text{Donc : } \vec{AD} = \vec{j} - \vec{i}$$

$$\text{on a : } \vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD} = -\vec{AB} + \vec{AD} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{i}$$

$$\text{Donc : } \vec{BD} = \vec{j} - 2\vec{i}$$

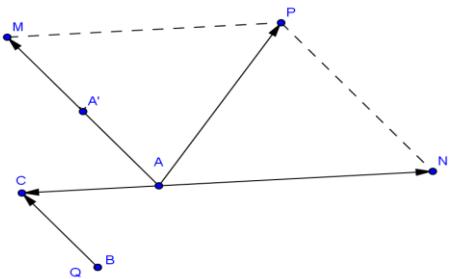
Exercice 6 : Soit A, B, C trois points du plan non alignés
On considère M, N, P et Q du plan tel que :

$$\vec{AM} = 2\vec{BC} \text{ et } \vec{AN} = -2\vec{AC} \text{ et } \vec{AM} + \vec{AN} = \vec{AP}$$

$$\text{et } \vec{AQ} = \frac{-1}{2}\vec{AP}$$

1) Faire une figure 2) En déduire que : $2\vec{AB} = -\vec{AP}$ et $B = Q$

Réponse : 1)



2) on a : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = 2\overrightarrow{BA}$

Donc $2\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AP}$

Et on a : $\overrightarrow{AQ} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AP} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AQ}$

Donc $2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AQ}$ Donc $B = Q$

Exercice 7 : soient les vecteurs \vec{u} et \vec{v}

Simplifier l'écriture des vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{W_1} = 2(\vec{u} + \vec{v}) - 4\left(\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}\right) \quad \text{et}$$

$$\overrightarrow{W_2} = \frac{1}{3}(3\vec{u} - 9\vec{v}) + \frac{1}{2}(2\vec{u} + 6\vec{v}) - 2\vec{u}$$

Réponse : $\overrightarrow{W_1} = 2(\vec{u} + \vec{v}) - 4\left(\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}\right)$

$$= 2\vec{u} + 2\vec{v} - 4 \times \frac{1}{2}\vec{u} + 4\vec{v}$$

$$\overrightarrow{W_1} = 2\vec{u} + 2\vec{v} - 2\vec{u} + 4\vec{v} = 6\vec{u} + \vec{0} = 6\vec{u}$$

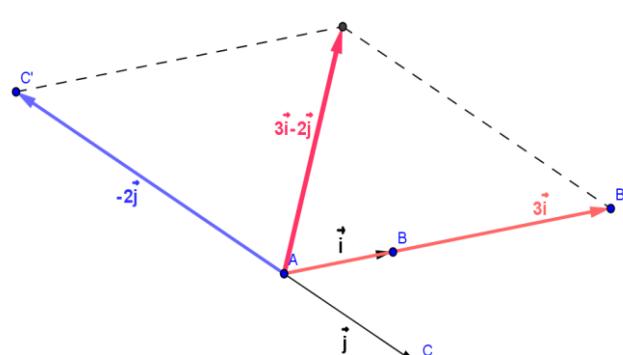
$$\overrightarrow{W_2} = \frac{1}{3}(3\vec{u} - 9\vec{v}) + \frac{1}{2}(2\vec{u} + 6\vec{v}) - 2\vec{u}$$

$$\overrightarrow{W_2} = \vec{u} - 3\vec{v} + \vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{u} = 2\vec{u} + \vec{0} - 2\vec{u} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

Exercice 8 : Soit ABC est un triangle

on pose : $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{j}$ construire le vecteur $3\vec{i} - 2\vec{j}$

Réponse :



Exercice 9 : soit ABC est un triangle. Les points E et F sont tels que :

$$\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

1) Faire une figure

2) montrer que : Les points E, F et B sont alignés

Réponse : 1)

2) On a : $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{CE}$

donc $\overrightarrow{BA} = 4\overrightarrow{EC}$

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{EC} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} = 4\left(\overrightarrow{EC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$$

Or on a : $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ car : $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ donc

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

Alors : $\overrightarrow{BF} = 4(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF})$ donc $\overrightarrow{BF} = 4\overrightarrow{EF}$

Donc \overrightarrow{BF} et \overrightarrow{EF} sont colinéaires

D'où Les points E, F et B sont alignés

Exercice 10 : soit ABC est un triangle. Les points E et F sont tels que : $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

1) Faire une figure

2) écrire les vecteurs \overrightarrow{EC} et \overrightarrow{BF} en fonction de :

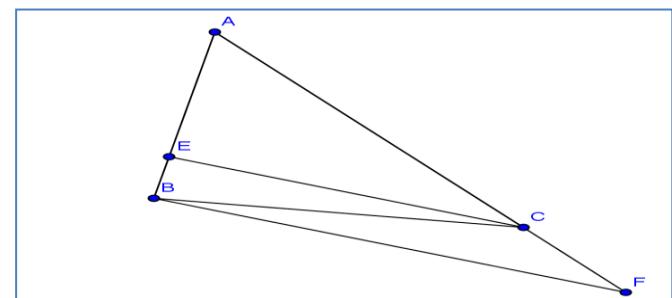
$$\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}$$

3) montrer que deux droites (EC) et (BF) sont parallèles

Réponse : 1)

2) on a : $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC}$

$$\text{Donc } \overrightarrow{EC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$



D'où $\overrightarrow{EC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

et on a : $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}$ donc $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

3) on a : $\overrightarrow{EC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ donc

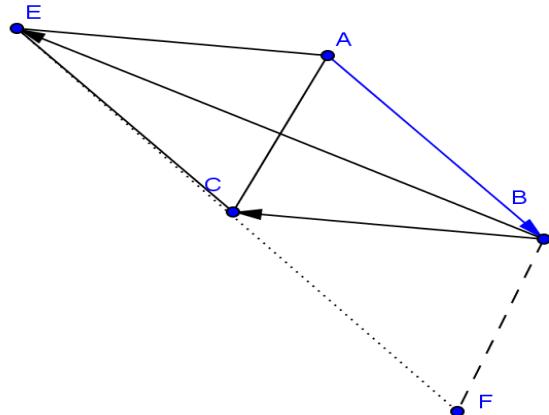
$$\overrightarrow{EC} = \frac{3}{4}\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}\right) \quad \text{Donc } \overrightarrow{EC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BF}$$

Exercice 11 soit ABC est un triangle. Les points E et F sont tels que :

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$$

1) Faire une figure

2) montrer que : C est le milieu du segment [EF]



Réponse 2) On a : $\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{BC}$

donc $\vec{BC} + \vec{CE} = \vec{BA} + \vec{BC}$ donc ① $\vec{CE} = \vec{BA}$

Et on a : $\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AC}$

Donc $\vec{AC} + \vec{CF} = \vec{AB} + \vec{AC}$ donc ② $\vec{CF} = \vec{AB}$

$\vec{CE} + \vec{CF} = \vec{BA} + \vec{AB} = \vec{AA} = \vec{0}$

Donc : C est le milieu du segment [EF]

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

