Notion d'arithmétique et l'Ensemble des nombres entiers

Exercice1 : compléter par : $\in$; $\notin$; $\subset$; $\not\subset$

$-4...\mathbb{N}$; $\frac{2}{3}...\mathbb{N}$; $\sqrt{2}...\mathbb{N}$; $\frac{8}{2}...\mathbb{N}$; $-\frac{15}{3}...\mathbb{N}$; $12-32...\mathbb{N}$;

$\sqrt{25}...\mathbb{N}$; $2{,}12...\mathbb{N}$; $0...\mathbb{N}^*$; $-\frac{\sqrt{100}}{3}...\mathbb{N}$

$2.12...\mathbb{N}$; $\pi...\mathbb{N}$; $\{1;2;7\}...\mathbb{N}$; $\{4;-2;12\}...\mathbb{N}$; $\mathbb{N}^*...\mathbb{N}$

Solutions : $-4.\notin\mathbb{N}$; $\frac{2}{3}\notin\mathbb{N}$; $\sqrt{2}\notin\mathbb{N}$; $\frac{8}{2}\in\mathbb{N}$; $-\frac{15}{3}\notin\mathbb{N}$;

$12-32\notin\mathbb{N}$; $\sqrt{25}\in\mathbb{N}$; $2{,}12\notin\mathbb{N}$; $0\notin\mathbb{N}^*$

$\frac{\sqrt{100}}{2}\in\mathbb{N}$; $2.12\notin\mathbb{N}$; $\pi\notin\mathbb{N}$; $\{1;2;7\}\subset\mathbb{N}$; $\{4;-2;12\}\not\subset\mathbb{N}$

$\mathbb{N}^*\subset\mathbb{N}$

Exercice2 : déterminer les multiples de 9 comprises entre :23 et 59

Solutions : les multiples de 9 s'écrivent sous la forme : $9k$ avec : $k\in\mathbb{N}$

$23\le 9k\le 59$ donc : $23/9\le k\le 59/9$

donc : $2.5\le k\le 6.5$ donc : $k\in\{3;4;5;6\}$

donc : les multiples de 9 comprises entre :23 et 59 sont :

9×3 ; 9×4; 9×5; 9×6

Cad : 45 ;36 :45 ;54

Exercice3 : déterminer le chiffre x pour que le nombre : $532x$ Soit divisible par 9

Solutions : on a $0\le x\le 9$

le nombre : $532x$ est divisible par 9 ssi : $5+3+2+x=10+x$ est un multiple de 9 donc : on donnant a x les valeurs entre 0 et 9 on trouve que $x=8$

Exercice4 : on pose : $x=3\times5\times7\times12$ et $y=2\times5\times3\times5$

Sans calculer x et y monter que :

1)75 divise y

2)105 divise x

Solutions : 1)on a $y=2\times5\times3\times5$ cad $y=2\times75$

Donc : 75 divise y

2) on a $x=3\times5\times7\times12$ cad $x=105\times12$

Donc : 105 divise x

Exercice5 : $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}$

Montrer que si a est pair et b impair alors la somme est un nombre impair.

<u>**Solution :**</u> a est pair alors : $a=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$

b Impair alors : $b=2k'+1$ avec $k'\in\mathbb{N}$

$a+b=2k+2k'+1=2(k+k')+1=2k''+1$

Donc : $a+b$ est un nombre impair

Exercice6 : $a\in\mathbb{N}$

Montrer que si a est impair alors a^2 est un nombre impair

<u>**Solution :**</u> a est impair alors : $a=2k+1$ avec $k\in\mathbb{N}$

$a^2=(2k+1)=(2k)^2+2\times2k\times1+1^2=4k^2+4k+1$

Donc : $a^2=2(k^2+2k)+1=2k''+1$ avec $k^2+2k=k''$

Donc : a^2 est un nombre impair

Exercice7 : $a\in\mathbb{N}$

Montrer que si a^2 est impair alors a est un nombre impair

<u>**Solution :**</u> on suppose que a est pair alors a^2 est un nombre pair or a^2 est impair donc : contradiction

Donc : a est un nombre impair

Remarques : Un nombre entier naturel est soit paire soit impaire, et on a les résultats suivants :

Nombres	a	b	$a+b$	$a-b$	$a\times b$
Parité des nombres	pair	pair	pair	pair	pair
	impair	impair	pair	pair	impair
	pair	impair	impair	impair	pair

Exercice8: Montrer que le produit de Deux nombres consécutifs est un nombre pair

Exercice9: Déterminer la parité des nombres suivants : $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$

1) 375^2+648^2 2) $2n+16$ 3) $10n+5$ 4) $18n+4m+24$

5) $2n^2+7$ 6) $8n^2+12nm+3$ 7) $26n+10m+7$

8) $n^2+11n+17$ 9) $n^2+7n+20$ 10) $(n+1)^2+7n^2$

11) n^2+5n 12) n^2+8n 13) n^2+n 14) n^3-n

15) $5n^2+n$ 16) $4n^2+4n+1$ 17) $n^2+13n+17$

18) $n+(n+1)+(n+2)$

<u>**Solution :**</u> 1) 375^2+648^2

648^2 Est paire car le carré d'un nombre pair

375^2 est impair car le carré d'un nombre impair

375^2+648^2 C'est la la somme d'un nombre impair Et un nombre pair donc c'est un nombre impair

2) $2n+16=2(n+8)=2\times k$ avec $k=n+8$

Donc $2n+16$ est un nombre pair

3) $10n+5=2(5n+2)+1=2\times k+1$ avec $k=5n+2$

Donc $10n+5$ est un nombre impair

4) $18n+4m+24=2(9n+2m+12)=2k$

Avec : $k=9n+2m+12$

Donc $18n+4m+24$ est un nombre pair

5) $2n^2+7=2n^2+6+1=2(n^2+3)+1=2k+1$

Avec : $k = n^2 + 3$ Donc $2n^2 + 7$ est un nombre impair

6) $8n^2 + 12nm + 3 = 2(4n^2 + 4nm + 1) + 1 = 2k + 1$

Avec : $k = 4n^2 + 4nm + 1$

Donc $8n^2 + 12nm + 3$ est un nombre impair

7) $26n + 10m + 7 = 2(13n + 5m + 3) + 1 = 2k + 1$

Avec : $k = 13n + 5m + 3$

Donc $26n + 10m + 7$ est un nombre impair

8)

$n^2 + 11n + 17 = n^2 + n + 10n + 16 + 1 = n(n+1) + 2(5n+8) + 1$

$n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

$n^2 + 11n + 17 = 2k + 2k' + 1 = 2(k + k') + 1 = 2k'' + 1$

Avec $k' = 6n + 8$ et $k'' = k + k'$

Donc $n^2 + 11n + 17$ est un nombre impair

9)

$n^2 + 7n + 20 = n^2 + n + 6n + 20 = n(n+1) + 2(3n+10)$

$n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

$n^2 + 7n + 20 = 2k + 2k' + 1 = 2(k + k') = 2k''$

Donc $n^2 + 7n + 20$ est un nombre pair

10)

$(n+1)^2 + 7n^2 = n^2 + 2n + 1 + 7n^2 = 8n^2 + 2n + 1 = 2(4n^2 + n) + 1 = 2k + 1$

Donc $(n+1)^2 + 7n^2$ est un nombre impair

11)

$n^2 + 5n = n^2 + n + 4n = n(n+1) + 4n = 2k + 4n = 2(k + 2n)$

Car $n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

Donc $n^2 + 5n$ est un nombre pair

12) étude de la parité $n^2 + 8n$

1cas : n pair

$n^2 = n \times n$ est aussi pair car le carré d'un nombre pair et

$8n = 2 \times 4n = 2 \times k$ est pair

Donc : $n^2 + 8n$ est pair C'est la la somme de deux Nombre pair

2cas : n impair

$n^2 = n \times n$ est aussi impair car le carré d'un nombre impair et

$8n = 2 \times 4n = 2 \times k$ est pair

Donc : $n^2 + 8n$ est impair C'est la la somme d'un nombre pair et un nombre impair

13) $n^2 + n = n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

14) $n^3 - n \quad n \in \mathbb{N}$

$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n^2 - 1^2) = n(n-1)(n+1)$

$n^3 - n = (n-1) \times n \times (n+1)$

est le produit de trois nombres consécutifs donc est un nombre pair

15) $5n^2 + n \quad n \in \mathbb{N}$

$5n^2 + n = 4n^2 + n^2 + n = 4n^2 + n(n+1) = 2 \times 2n^2 + 2k = 2 \times (2n^2 + k) = 2 \times k'$

Avec : $k' = 6n + 8$ et $k'' = k + k'$

Car $n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

donc $5n^2 + n$ est un nombre pair

16) $4n^2 + 4n + 1 \quad n \in \mathbb{N}$

$4n^2 + 4n + 1 = (2n)^2 + 2 \times 2n \times 1 + 1^2 = (2n+1)^2$

donc est un nombre impair car $2n+1$ est un nombre impair et la carré d'un nombre impair est impair

17) $n^2 + 13n + 17$

$n^2 + 13n + 17 = n^2 + n + 12n + 16 + 1 = n(n+1) + 2k' + 1$

$= 2k + 2k' + 1 = 2(k + k') + 1 = 2k'' + 1$

Car $n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

donc $n^2 + 13n + 17$ est un nombre impair

18) $n + (n+1) + (n+2)$

1cas : n pair

$n + (n+1) + (n+2)$ est impair

2cas : n impair

$n + (n+1) + (n+2)$ est pair

Exercice10 : $n \in \mathbb{N}$

On pose : $x = 2n + 7$ et $y = 4n + 2$

1) montrer que : x est impair et que y est pair

2) montrer que : $x + y$ est un multiple de 3

Solution : 1)

$x = 2n + 7 = 2n + 6 + 1 = 2(n+3) + 1 = 2k + 1$

Avec : $k = n + 3$ donc : x est impair

$y = 4n + 2 = 2(2n+1) = 2k$

Avec : $k = 2n + 1$ donc : y est pair

2) $x + y = 2n + 7 + 4n + 2 = 6n + 9 = 3(2n+3) = 3k$

Avec : $k = 2n + 3$ donc : $x + y$ est un multiple de 3

Exercice11 : déterminer les nombres premiers inférieurs ou égaux à 100

Solution :

Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 100 sont :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

Remarques: 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur : 1

2 est le seul nombre premier pair

Il y a une infinité de nombre premier

Exercice12 : Est-ce que les nombres suivants sont premiers ? justifier votre réponse ?

0 ; 1 ; 2 ; 17 ; 21 ; 41 ; 87 ; 105 ; 239 ;2787 ; 191 ;1004001

Solution : 1)

0 n'est pas premier car tous les nombres divise 0

1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur : 1

2 est premier car admet exactement deux diviseurs

17 est premier car admet exactement deux diviseurs

21 n'est pas premier car 3 divise 21 $(21 = 7 \times 3)$

41 est premier car admet exactement deux diviseurs

87 n'est pas premier car 3 divise 87 $(87 = 29 \times 3)$

105 n'est pas premier car 5 divise 105 $(105=5\times21)$
2)Est ce que 239 est premier ? on utilise une technique :
On cherche les les nombres premiers p qui vérifient :
$p^2 \le 239$
Les nombres sont : 2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13 et aucun ne divise 239
Donc 239 est premier
2787 n'est pas premier car la somme des chiffres est 24 un multiple de 3 donc 3 divise 2787
3) Est ce que 191 est premier ? on utilise une technique :
On cherche les les nombres premiers p qui vérifient :
$p^2 \le 191$
Les nombres sont : 2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13 et aucun ne divise 191 Donc 191 est premier
4)1004001n'est pas premier car la somme des chiffres est 6 un multiple de 3 donc 3 divise 1004001

Exercice13 : décomposer en produit de facteurs premiers le nombre 60 et en déduire tous les diviseurs de 60

Solution :
$60 = 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 15 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$
L'ensemble des diviseurs de 60 est :
$D_{60} = \{1;2;3;4;5;6;10;12;15;20;30;60\}$

Exercice14 : décomposer en produit de facteurs premiers le nombre 1344 et en déduire le nombre de diviseurs de 1344

1344	2
672	2
336	2
168	2
84	2
42	2
21	3
7	7
1	

Solution : technique : $60 = 2^6 \times 3 \times 7$

Exercice15: en utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers :
1. Simplifier la fraction $\frac{84}{60}$
2. Simplifier des racines carrées : $A=\sqrt{2100}$ t $B = \sqrt{63} \times \sqrt{105}$

Solution : 1)
$\frac{84}{60} = \frac{2\times2\times3\times7}{2\times2\times3\times5} = \frac{7}{5} \longleftarrow$ Fraction irréductible

2) $\sqrt{2100} = \sqrt{2\times2\times3\times5\times5\times7}$
$= \sqrt{2^2\times3\times5^2\times7}$
$= \sqrt{\left(2^2\times5^2\right)\times3\times7}$
$= \sqrt{(2\times5)^2}\times\sqrt{3\times7}$
$= 2\times5\times\sqrt{21}$
$= 10\sqrt{21}$

On décompose chacun des nombres 63 et 105.
$63 = 3 \times 21 = 3 \times 3 \times 7 = 3^2 \times 7$
$105 = 3 \times 35 = 3 \times 5 \times 7$
d'où $B = \sqrt{63 \times 105} = \sqrt{3^2 \times 7 \times 3 \times 5 \times 7} = 3 \times 7\sqrt{3 \times 5} = 21\sqrt{15}$.

Exercice16 : 1) décomposer en produit de facteurs premiers les nombres : 50 ; 360 ; 60 ;24 ;56 ;14 ; 42
2)calculer : *PGCD (50 ; 360) ; PGCD (60 ; 50) PGCD (56 ; 14) ; PGCD (56 ; 42) ; PGCD (24 ; 60)*

Solution :1)
$50 = 2 \times 5^2$; $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
$60 = 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 15 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$
$24 = 2 \times 12 = 2 \times 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$
$56 = 2 \times 28 = 2 \times 2 \times 14 = 2\times2\times2\times7 = 2^3 \times 7$
$14 = 2 \times 7$ et $42 = 2 \times 3 \times 7$
2)Donc PGCD(50 ; 360) = $2\times 5= 10$
Donc PGCD(60 ; 50) = $2\times 5= 10$
Donc PGCD(56 ; 14) = $2\times 7= 14$
Donc PGCD(56 ; 42) = $2\times 7= 14$
Donc PGCD(24 ; 60) = $2^2\times 3 = 12$

Exercice17 : 1) décomposer en produit de facteurs premiers les nombres : 170 ; 68 ; 60 ;220 ;340
2)calculer : *PPCM (68 ; 170); PPCM (220 ; 340)*

Solution :1) $170 = 2 \times 5 \times 17$
$68 = 2 \times 2 \times 17 = 2^2 \times 17$
$220 = 2 \times 2 \times 5 \times 11 = 2^2 \times 5 \times 11$
$340 = 2 \times 2 \times 5 \times 17 = 2^2 \times 5 \times 17$
2)Donc PPCM (68 ; 170) $=2^2 \times 5\times 17= 340$
Donc PPCM (220 ; 340) $= 2^2 \times 5\times 11\times 17= 3740$

Exercice18 : soit n est un nombre entier naturel impair
1)verifier que n^2-1 est un multiple de 8 dans cas suivants : $n=1$; $n=3$; $n=5$; $n=7$
2)montrer que n^2-1 est un multiple de 4 si n est impair
3)montrer que n^2-1 est un multiple de 8 si n est impair
4)en déduire que : n^4-1 est un multiple de 16 si n est impair
5) montrer que si n et m sont impairs alors : n^2+m^2+6 est un multiple de 8

Solution :1) si $n=1$ alors $1^2-1=0$ est un multiple de 8
Si $n=3$ alors $3^2-1=8$ est un multiple de 8
Si $n=5$ alors $5^2-1=24$ est un multiple de 8
Si $n=7$ alors $7^2-1=48$ est un multiple de 8
2) n *est impair* donc : $n=2k+1$
Donc : $n^2-1=(2k+1)^2-1=(2k)^2+2\times2k\times1+(1)^2-1$
$n^2-1=4k^2+4k+1-1=4k^2+4k=4\left(k^2+k\right)=4\times k'$
Avec $k'=k^2+k$
Donc : n^2-1 *est un multiple de 4*
3)on a trouvé : $n^2-1=4k(k+1)$
Or $k(k+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair donc : $k(k+1)=2k'$
Donc : $n^2-1=8k'$
Donc : n^2-1 est un multiple de 8
4) $n^4-1=\left(n^2\right)^2-1^2=\left(n^2-1\right)\left(n^2+1\right)$
Et *on a trouvé que:* $n^2-1=4k'$
Et *on a :*
$n^2+1=4k^2+4k+1+1=4k^2+4k+2=4\left(k^2+k+1\right)=4\times k''$
Donc : $n^4-1=\left(n^2-1\right)\left(n^2+1\right)=(4k')(4k'')=16k'''$
Donc : n^4-1 est un multiple de 16
5) *on a trouvé que:* n^2-1 est un multiple de8
Donc : $n^2-1=8k$ donc : $n^2=8k+1$
De même on a : : m^2-1 est un multiple de8
Donc : $m^2-1=8k'$ donc : $m^2=8k'+1$
$n^2+m^2+6=8k+1+8k'+1+6=8k+8k'+8=8(k+k'+1)=8k''$
Donc : n^2+m^2+6 est un multiple de 8

AUTRE : Exercices

Exercice1 :

1) Donner tous les multiples de 14 inférieur à 80.
2) Donner tous les multiples de 25 compris entre 50 et 170.
3) Donner les diviseurs de chacun des nombres 8 ;36 ;24 ;30 ;2 et 5.
4) Donner tous les nombres premier inférieur à 60.
5) Est-ce que13 divise 704 ? justifier votre repense ?
6) Est-ce que 2352 est un multiple de 21 ? justifier votre réponse ?

Exercice2 : décomposer les nombres suivants en produit de puissances de facteurs premiers :
161 ; 144 ; 10000 ; 23000 ; 1080 ; 1400x49

Exercice3 : à l'aide de décomposition en facteurs premiers simplifier la fraction suivante : $\frac{612}{1530}$ et écrire :
$\sqrt{612\times1530}$ sous la forme $m\sqrt{n}$ avec m et n entiers

Solution : $612=2^2\times3^2\times17$ et $1530=2^1\times3^2\times5^1\times17$
$PGCD(1530;612)=2^1\times3^2\times17=153$

Méthode 1 : $\frac{612}{1530}=\frac{2^1\times3^2\times5\times17}{2^2\times3^2\times17}=\frac{5}{2}$

Méthode 1 : $\frac{612}{1530}=\frac{612\div153}{1530\div153}=\frac{5}{2}$

$\sqrt{612\times1530}=\sqrt{2^1\times3^2\times5\times2^2\times3^2\times17^2}$
$\sqrt{612\times1530}=\sqrt{2}\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{2^2}\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{17^2}$
$\sqrt{ab}=\sqrt{2}\times3\times\sqrt{5}\times2\times3\times17=306\times\sqrt{10}$

Exercice4: déterminer le plus grand diviseur commun de x et y dans chaque cas :

1) x=75 et y= 325.
2) x=330 et y= 420.
3) x=214 et y= 816.
4) x=575 et y= 1275.
5) x=132 et y= 666.

Exercice5: déterminer le plus petit multiple commun de x et y dans chaque cas :

6) x=75 et y= 325.
7) x=330 et y= 420.
8) x=214 et y= 816.
9) x=575 et y= 1275.
10) x=132 et y= 666.

<u>Exercice6:</u>

- Est-ce que 111111 est un nombre premier ? justifier votre repense ?
- Montrer que1000000001 ; 3^{20} - 1 et 123 4 5 6^3ne sont pas des nombres premiers.
- Montrer que 499999^2 + 999999 est divisible par 25.

Exercice7: déterminer les nombres pairs et les nombres impairs :2^2 +1 ; 15^2x 9^2 ; 15^2 -13^2 ; 642 x 97681 ; $(41^2+765^2)^7$; 2176543 x 34569820 ; 97^3 x 97^2 ; 2n + 8 ; $4n^2$ +1 ; n (n +1)
$3n^2$ + n ; n + (n + 1) + (n + 2) ; $5n^2$ + 5n +1 ; $8n^2$ + 8n +1 (n + 1)(n + 2)(n + 3) ; $2n^2$ + 4n + 7 ; 20122n + 20092 ;
(2n + 5)(2n + 6) n (n + 3) ; 1 + $(n +1)^2$ + $(n + 2)^2$;
n^2 - 3n + 4 ; n^2 + 3n + 4

Exercice8 : Deux voitures partent en même temps de la ligne de départ et font plusieurs tours d'un même circuit. La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.
1) Y-a-t-il des moments (autres que le départ !) où les voitures se croisent sur la ligne de départ ?
2) Préciser le nombre de déplacement par laps de temps

Dans les exercices, n est un entier naturel

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien