Exercices corrigés d'arithmétique dans N Partie IV

Exercices d'arithmétique

Exercice 11 :

Soit n un entier naturel, A et B deux nombres tels que :

$$A = 2^{n} \times 3^{4} + 2^{n} \quad \text{et} \quad B = 3^{n} \times 2^{4} + 3^{n}$$

1 – a – Vérifier que : $A = 2^{n+1} \times 41$ **et** $B = 3^{n} \times 17$

b – En déduire la parité de A et B.

c – Déterminer PGCD(A ,B) et PPCM(A ,B) et déduire que A et B sont premier entre eux.

2 – Montrer que : $(A - 2^{n})(B - 3^{n})$ **est divisible par 1296.**

3 – Montrer que : $3^{n} \times A - 2^{n} \times B$ **est un multiple de 5 et 13**

Exercice 12 :

On pose $a = 2^{3} \times 5^{2} + 2^{5} \times 5$ et $b = 2^{2} \times 3 + 2^{4} \times 3$

1 - Ecrire sous forme d'un produit de nombres premiers les deux entiers a et b.

2 - Calculer PGCD(a , b) et PPCM(a , b)

3 - Déterminer le plus petit dénominateur commun puis calculer la somme

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

Exercices d'arithmétique

Solution de l'exercice 11 :

Soit n un entier naturel, A et B deux nombres tels que :

$A = 2^n \times 3^4 + 2^n$ et $B = 3^n \times 2^4 + 3^n$

1 – a - Vérifier que: $A = 2^{n+1} \times 41$ et $B = 3^n \times 17$

On a $A = 2^n \times 3^4 + 2^n = 2^n(3^4 + 1)$ donc $A = 2^n \times 82$ donc $A = 2^n \times 2 \times 41$

D'ou $A = 2^{n+1} \times 41$

$B = 3^n \times 2^4 + 3^n = = 3^n(2^4 + 1)$

D'ou $B = 3^n \times 17$

b - En déduire la parité de A et B.

On a $A = 2^{n+1} \times 41 = 2(2^n \times 41)$ et $2^n \times 41 \in \mathbb{N}$

D'ou A est pair

On a $B = 3^n \times 17$ et 3 est impair donc 3^n est impair or 17 est impair

On sait que le produit de deux nombres impairs est impair.

D'ou B est impair

Exercices d'arithmétique

c – Déterminer PGCD(A ,B) et PPCM(A ,B) et déduire que A et B sont premier entre eux.

On a $A = 2^{n+1} \times 41$ et $B = 3^n \times 17$

D'où PGCD(A ,B) = 1

PPCM(A ,B) $= 2^{n+1} \times 41 \times 3^n \times 17$

On a PGCD(A ,B) = 1 d'où A et B sont premier entre eux.

2 – Montrer que : $(A - 2^n)(B - 3^n)$ est divisible par 1296

$A = 2^n \times 3^4 + 2^n$ et $B = 3^n \times 2^4 + 3^n$

$(A - 2^n)(B - 3^n) = (2^n \times 3^4 + 2^n - 2^n)(3^n \times 2^4 + 3^n - 3^n)$

Donc $(A - 2^n)(B - 3^n) = 2^n \times 3^4 \times 3^n \times 2^4$

Donc $(A - 2^n)(B - 3^n) = 2^n \times 3^n \times 3^4 \times 2^4 = (2\times3)^n\times (2\times3)^4$

Donc $(A - 2^n)(B - 3^n) = 6^n\times 6^4$ Donc $(A - 2^n)(B - 3^n) = 1296 \times 6^n$

D'où $(A - 2^n)(B - 3^n)$ est divisible par 1296

Exercices d'arithmétique

3 - Montrer que : $3^n \times A - 2^n \times B$ est un multiple de 5 et 13

$$3^n \times A - 2^n \times B = 3^n \times (2^n \times 3^4 + 2^n) - 2^n \times (3^n \times 2^4 + 3^n)$$

$$3^n \times A - 2^n \times B = 3^n \times 2^n \times 3^4 + 3^n \times 2^n - 2^n \times 3^n \times 2^4 - 2^n \times 3^n$$

$$3^n \times A - 2^n \times B = 3^n \times 2^n (3^4 - 2^4) = (3 \times 2)^n (81 - 16)$$

Donc $3^n \times A - 2^n \times B = 6^n \times 65$ donc $3^n \times A - 2^n \times B = 6^n \times 5 \times 13$

D'où $3^n \times A - 2^n \times B$ est un multiple de 5 et 13

Exercices d'arithmétique

Solution de l'exercice 12 :

On pose $a = 2^3 \times 5^2 + 2^5 \times 5$ et $b = 2^2 \times 3 + 2^4 \times 3$

1 – Ecrire sous forme d'un produit de nombres premiers les deux entiers a et b.

On a $a = 2^3 \times 5^2 + 2^5 \times 5$

$a = 2^3 \times 5 (5 + 2^2) = 2^3 \times 5 \times 9 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

D'ou $a = 2^3 \times 3^2 \times 5$

On a $b = 2^2 \times 3 + 2^4 \times 3$

$b = 2^2 \times 3 + 2^4 \times 3 = 2^2 \times 3(1 + 2^2)$

D'ou $b = 2^2 \times 3 \times 5$

2 – Calculer PGCD(a , b) et PPCM(a , b)

$a = 2^3 \times 3^2 \times 5$

$b = 2^2 \times 3 \times 5$

PGCD(a , b) = $= 2^2 \times 3 \times 5$ PPCM(a , b) $= 2^3 \times 3^2 \times 5$

Exercices d'arithmétique

3 – Déterminer le plus petit dénominateur commun puis calculer la somme

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

On a PPCM(a , b) = $2^3 \times 3^2 \times 5$ et a = $2^3 \times 3^2 \times 5$ donc PPCM(a , b) = a

Le plus petit dénominateur commun de $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ est le PPCM(a , b)

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2^3\times 3^2\times 5}+\frac{1}{2^2\times 3\times 5}=\frac{1}{2^3\times 3^2\times 5}+\frac{2\times 3}{2^3\times 3^2\times 5}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+\frac{6}{a}=\frac{7}{a}$$

D'où $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{7}{360}$$