Exercices corrigés d'arithmétique dans N Partie I

Exercices corrigés d'arithmétique dans N

Exercice 1 :

1 – Déterminer la parité des nombres suivants :

Soit n un nombre entier naturel.

$A = n(n+1)$; $B = (2n+1)^{2021} + (4n)^{2020}$; $C = 3n^3 - n$

2 – Soit n un entier naturel. Vérifier que :

$n^2 + 5n + 7 = (n+2)(n+3) + 1$ puis montrer que $n^2 + 5n + 7$ est impair.

Exercice 2 :

1 – Développer le nombre $A = (3n+2)^2 - 5n(n + \frac{8}{5}) - 3$; $n \in \mathbb{N}$

2 – En déduire que A est un **carré parfait.**

3 – Déterminer la parité du nombre A.

Exercice 3 :

Soient m et n deux nombres entiers naturels, tel que $m > n$.

1 – Montrer que $m - n$ et $m + n$ ont la même parité.

2 – Résoudre dans N l'équation $m^2 - n^2 = 12$

Exercices corrigés d'arithmétique dans N

Solution de l'exercice 1 :

1 – Déterminer la parité des nombres suivants :

Soit n un nombre entier naturel.

$A = n(n + 1)$; $B = (2n+1)^{2021} + (4n)^{2020}$; $C = 3n^3 - n$

On a $A = n(n + 1)$

On distingue deux cas:

Si n est pair il existe un entier naturel k tel que : $n = 2k$ donc $n + 1 = 2k + 1$

Donc $n(n + 1) = 2k(2k + 1)$ donc $A = 2(2k^2 + k)$ on pose $k' = 2k^2 + k$ donc $k' \in \mathbb{N}$

Donc $A = 2k'$ d'où **A est pair**

Si n est impair il existe un entier naturel k tel que : $n = 2k + 1$ donc $n + 1 = 2k + 2$

Donc $n(n + 1) = (2k + 1)(2k + 2)$ donc $A = 2(2k + 1)(k + 1)$

on pose $k' = (2k + 1)(k + 1)$ donc $k' \in \mathbb{N}$

Donc $A = 2k'$ d'où **A est pair**

Conclusion : pour tout n entier naturel $n(n + 1)$ est pair

Le produit de deux nombres entiers naturels consécutifs est pair.

Exercices corrigés d'arithmétique dans N

$\mathbf{B = (2n+1)^{2021} + (4n)^{2020}}$

On a $2n + 1$ est impair donc $\mathbf{(2n+1)^{2021}}$ **est aussi impair**

On a $4n = 2(2n)$ est pair donc $\mathbf{(4n)^{2020}}$ **est aussi pair**

la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est impair

D'où B est impair

On a $C = 3n^3 - n = 2n^3 + n^3 - n$

Donc $C = 2n^3 + n(n^2 - 1)$ Donc $C = 2n^3 + n(n + 1)(n - 1)$

$n(n + 1)$ est pair il existe un entier naturel k tel que: $\mathbf{n(n + 1) = 2k}$

le produit de deux nombres entiers naturels consécutifs est pair

Donc $C = 2n^3 + 2k(n - 1) = 2(n^3 + kn - k)$

on pose $k' = n^3 + kn - k$ donc $k' \in \mathbb{N}$

Donc $C = 2k'$ d'où **C est pair**

2) **Vérifier que :** $\mathbf{n^2 + 5n + 7 = (n + 2)(n + 3) + 1}$

On a $\mathbf{(n + 2)(n + 3) + 1 = n^2 + 3n + 2n + 6 + 1}$ **donc** $\mathbf{(n + 2)(n + 3) + 1 = n^2 + 5n + 7}$

D'où $\mathbf{n^2 + 5n + 7 = (n + 2)(n + 3) + 1}$

On a $\mathbf{(n + 2)(n + 3)}$ est pair il existe un entier naturel k tel que: $\mathbf{(n + 2)(n + 3) = 2k}$

Donc $\mathbf{n^2 + 5n + 7 = 2k + 1}$ d'où $\mathbf{n^2 + 5n + 7}$ **est impair**

Exercices corrigés d'arithmétique dans N

<u>Solution de l'exercice 2 :</u>

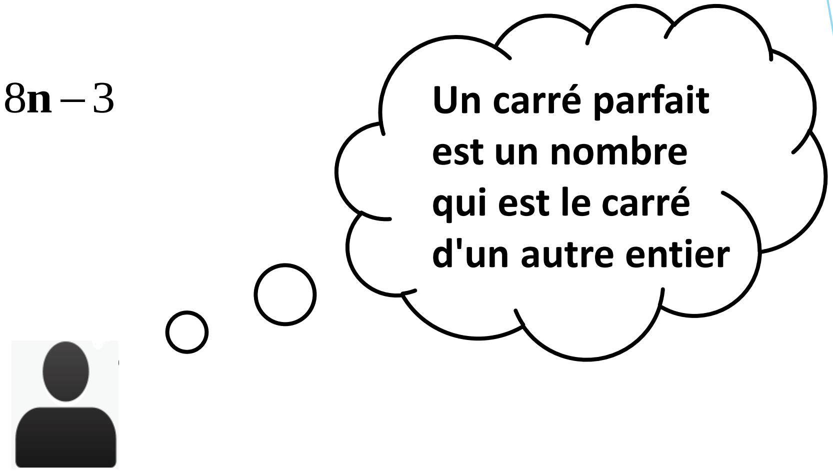
1 – Développer le nombre $\mathbf{A} = (3\mathbf{n}+2)^2 - 5\mathbf{n}(\mathbf{n}+\frac{8}{5}) - 3 \quad ; \mathrm{n} \in \mathrm{N}$

On a $(3\mathbf{n}+2)^2 - 5\mathbf{n}(\mathbf{n}+\frac{8}{5}) - 3 = 9\mathbf{n}^2 + 12\mathbf{n} + 4 - 5\mathbf{n}^2 - 8\mathbf{n} - 3$

Donc **A = 4n² + 4n + 1**

2 – En déduire que A est un **carré parfait.**

On a $4\mathbf{n}^2 + 4\mathbf{n} + 1 = (2\mathbf{n})^2 + 2 \times 2\mathbf{n} \times 1 + 1^2 = (2\mathbf{n}+1)^2$

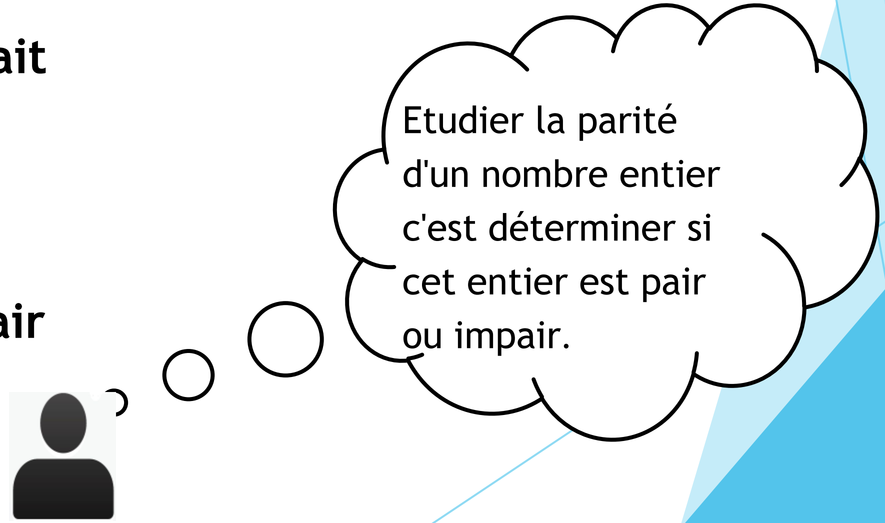


Donc **A = (2n + 1)²** **d'où A est un carré parfait**

3 – Déterminer la parité du nombre A.

On a 2n + 1 est impair donc **(2n+1)²** **est aussi impair**

D'où **A est impair**



Exercices corrigés d'arithmétique dans N

<u>Solution de l'exercice 3 :</u>

Soient m et n deux nombres entiers naturels, tel que $m > n$.

1 – Montrer que $m - n$ et $m + n$ ont la même parité.

On suppose que $m - n$ est pair et montrons que $m + n$ est aussi pair

$m - n$ est pair il existe un entier naturel k tel que : $m - n = 2k$

$m - n + 2n = 2k + 2n$ donc $m + n = 2(k + n)$ on pose $k' = k + n$ donc $k' \in \mathbb{N}$

Donc $m + n = 2k'$ D'où $m + n$ **est pair**

On suppose que $m - n$ est impair et montrons que $m + n$ est aussi impair

$m - n$ est impair il existe un entier naturel k tel que : $m - n = 2k + 1$

$m - n + 2n = 2k + 1 + 2n$ donc $m + n = 2(k + n) + 1$

on pose $k' = k + n$ donc $k' \in \mathbb{N}$

Donc $m + n = 2k' + 1$

D'où $m + n$ **est impair**

Exercices corrigés d'arithmétique dans N

2 – Résoudre dans N l'équation $m^2 - n^2 = 12$

Soient m et n deux nombres entiers naturels, tel que $m > n$.

$m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$ Donc $(m - n)(m + n) = 12$

$m - n$ et $m + n$ ont la même parité et 12 est pair

Donc $(m - n)$ et $(m + n)$ sont pairs On a $12 = 2 \times 6$ Puisque $m - n < m + n$

Donc $m - n = 2$ et $m + n = 6$

Donc $\begin{cases} \mathbf{m} + \mathbf{n} = 6 \\ \mathbf{m} - \mathbf{n} = 2 \end{cases}$ Donc $m + n + m - n = 6 + 2$ Donc $2m = 8$

Donc $m = 4$

On a $m + n - (m - n) = 6 - 2$ Donc $2n = 4$

Donc $n = 2$

D'où $m = 4$ et $n = 2$

