I. Les nombres pairs – les nombres impairs :

a. Activité :

Donner une définition d'un nombre paire puis d'un nombre impaire .

b. Définition :

Soit n de $\mathbb{N}$.

Si n est divisible par 2 , c'est un nombre pair . Si non n est impair .

c. Remarque :

- 0 (zéro) est un nombre pair (car 2 divise 0)
- 1 (un) est un nombre impair .
- $n \in \mathbb{N}$, n est pair équivaut qu'il existe k de $\mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.
- $n \in \mathbb{N}$, n est impair équivaut qu'il existe k de $\mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.

d. Exercice d'application :

- Montrer que la somme de deux entiers pairs est un entier pair .
- Montrer que le produit de deux entiers impairs est un entier impair .
- Montrer que la différence de deux entiers impairs est un entier pair .

II. Critères de divisibilité:

a. Activité :

Est-ce que le nombre 540 est divisible par 2 ; 3 ; 4 ; 5 ;9 (justifier)

b. Critères :

Un nombre naturel est divisible par :

- 2 si le chiffre d'unité est pair .
- 3 si la somme des chiffres est divisible par 3 .
- 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres (chiffres d' unité et de dizaine) est divisible par 4 .
- 5 si le chiffre d'unité est 0 ou 5 .
- 8 si le nombre formé par ses trois derniers chiffres (chiffres d' unité et de dizaine et de centaine) est divisible par 8 .
- 9 si la somme des chiffres est divisible par 9 .
- 11 on désigne par S_1 la somme des chiffres de rang impairs (de droite à gauche) et S_2 la somme des chiffres de rang pairs , soit $d = S_1 - S_2$.
  - Si $d \geq 0$ alors :
    - ✓ le nombre est divisible par 11 si et seulement si d est divisible par 11.
    - ✓ le nombre est divisible par 11 si et seulement si la somme des ses chiffres est divisible par 9 .
  - Si $d < 0$ alors : le nombre est divisible par 11 si et seulement si $d + 11p$ est divisible par 11. (p est le plus petit entier naturel tel que $d + 11p \geq 0$) .
- 25 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres (chiffres d' unité et de dizaine) est divisible par 25 .

III. Nombres premiers :

a. Entiers premiers entre eux :

- **Définition :**

Deux entiers a et b sont premiers entre eux (ou étrangers) si $a \wedge b = 1$ ($\text{pgcd}(a,b) = 1$)

- **Exemple :**

$17 \wedge 42 = 1$ donc 17 et 42 sont premiers entre eux .

b. Nombres premiers :

- **Définition :**

Un entier naturel $p \geq 2$ est dit premier , si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et lui même (ou encore a juste deux de diviseurs positifs)

- **Remarque :**

Un entier naturel différent de 1 qui n'est pas premier est appelé nombre composé .

c. Théorèmes :

- Tout entier naturel admet au moins un diviseur premier .
- Tout entier naturel différent de 1 , le plus petit diviseur d après 1 est un nombre premier .
- Un entier naturel n distinct de 1 est composé si et seulement si il admet un diviseur premier p tel que $p \leq \sqrt{n}$.

- **Application :**

Prenons le nombre 299 . 299est –il un nombre premier ?

- On a $\sqrt{299} \simeq 17,29$ d'ou $17^2 < 299 < 18^2$ par suite les nombres premiers ≤ 17 sont 2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17.
- Si l'un des ces nombres divise 299 alors 299 est un nombre composé , si non 299 est un nombre premier .
- On vérifie : 2 , 3 , 5 , 7 , 11 ne divisent pas 299 mais 13 divise 299 on s'arrête on conclut que 299 est un nombre composé (299 n'est pas un nombre premier) .

d. Remarque :

Il existe une infinité de nombres premiers .

IV. Décomposition en facteurs premiers :

a. Définition :

$a \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$; $\left(a \in \mathbb{N}^* \text{ et } a \neq 1\right)$.

a s'écrit sous la forme d'un produit de plusieurs facteurs des nombres premiers qu'on l'appelle décomposition en facteurs premiers du nombre a .

b. Exemple :

1) $30 = 2 \times 3 \times 5$ et 2) $31 = 1 \times 31$.

c. Théorème :

$a \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ sont des nombres entiers non nuls , il existe des nombres premiers distincts deux à deux $p_1, p_2, \ldots, p_i$.

a se décompose de façon unique sous la forme : $a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_i^{\alpha_1}$.

d. Exemple :

$a = 1980 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$; $a = 45 = 3^2 \times 5 = 3^2 \times 5$

V. Diviseurs d'un entier naturel – le plus grand commun diviseur de a et b ($\text{pgcd}(a,b)$):

a. Activité :

1. Trouver les diviseurs de 120 et 42 .
2. Que représente le diviseur 6 pour 120 et 42

b. Vocabulaire :

- On dit que : 3 divise 120 ou encore 3 est un diviseur de 120 .
- L'entier 6 s'appelle le plus grand diviseur commun de 120 et 42. On note $\operatorname{pgcd}(120,42)=6$ ou $120 \wedge 42=6$.

c. Definition :

Soient a et b deux entiers naturels non nuls .
Le plus grand commun diviseur de a et b est noté par $\operatorname{pgcd}(a,b)$ ou $a \wedge b$.

d. Exemple :

- $\operatorname{pgcd}(42,18)$, on a : $42=2\times3\times7$ et $18=2\times3^2$

On a : $D_{42}=\{1,2,3,7,6,14,21,42\}$ et $D_{18}=\{1,2,3,6,9,18\}$ d'où : $D_{42}\cap D_{18}=\{1,2,3,6\}$

Pa suite : $\operatorname{pgcd}(42,18)=6$.

e. Théorème (admis) :

$\operatorname{pgcd}(a,b)$ [Le plus grand commun diviseur de a et b supérieurs ou égaux à 2] est le produit des facteurs premiers communs à a et b munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition en facteurs premiers de a et b.

f. Exemple :

On a : $a=2\times3^4\times7$ et $b=2^5\times3^2\times5\times11^2$ d'où $\operatorname{pgcd}(42,18)=2\times3^2$

VI. Les multiples d'un entier naturel – le plus petit commun multiple de a et b ($\operatorname{ppcm}(a;b)$) :

a. Activité :

1. Trouver les multiples de 42 et 18 .
2. Que représente le multiple 126 pour 42 et 18 .

b. Vocabulaire :

- On dit que : 84 est un multiple de 42 .
- L'entier 126 s'appelle le plus petit commun multiple de 42 et 18; on note $\operatorname{ppcm}(42,18)=126$ ou $42\vee18=126$.

c. Définition :

Soient a et b deux entiers naturels non nuls .
Le plus petit commun multiple de a et b est noté par $\operatorname{ppcm}(a,b)$ ou $a\vee b$.

d. Exemple :

- $\operatorname{ppcm}(42,18)$, on a : $a=42=2\times3\times7$ et $b=18=2\times3^2$
  - On a ensemble des multiples de 42 est : $42\mathbb{N}=\{0,42,84,\boxed{126},168,210,.......\}$.
  - On a ensemble des multiples de 42 est : $18\mathbb{N}=\{0,18,36,54,72,90,108,\boxed{126},144,...\}$.
  - d'où : $42\mathbb{N}\cap18\mathbb{N}=\{\boxed{126},252,378,...\}$. Pa suite : $\operatorname{ppcm}(42,18)=126$.

f. **Théorème (admis) :**

$ppcm(a,b)$ [Le plus petit commun multiple de a et b supérieurs ou égaux à 2] est le produit de tous les facteurs premiers communs et non communs de a et b munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition en facteurs premiers de a et b.

g. **Exemple :**

- On a : $a = 2\times3^4\times7$ et $b = 2^5\times3^2\times5\times11^2$ d'où $ppcm(a,b) = 2^5\times3^4\times5\times7\times11^2$.
- On a : $a = 2^3\times3^4\times5^7\times11^2 ; b = 2^2\times3^8\times7^4\times13^3$ d'où $ppcm(a,b) = 2^3\times3^8\times5^7\times7^4\times11^2\times13^3$ et $pgcd(a,b) = 2^2\times3^4$

h. **Remarque :**

- $pgcd(a,b) = pgcd(b,a)$, $pgcd(1,a) = 1$, $pgcd(a,a) = a$.
- $ppcm(a,b) = ppcm(b,a)$, $ppcm(1,a) = a$, $ppcm(a,a) = a$.
- $pgcd(a,b)\times ppcm(a,b) = a\times b$.

VII. Division euclidienne dans $\mathbb{N}$:

a. **Définition :**

Soients a et b deux entiers naturels ou $b > 0$.

Il existe un couple unique d'entiers naturels (q,r) tels que $\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \le r < b \end{cases}$

- q est appelé le quotient .
- r le reste .
- a est le dividende et b le diviseur de la division euclidienne de a par b .

b. **Exemple :**

la division euclidienne de 17 par 5 est $\begin{cases} 17 = 5\times3 + 2 \\ 0 \le 2 < 5 \end{cases}$

- 3 est le quotient .
- 2 est le reste .
- 17 est le dividende et 5 le diviseur de la division euclidienne de 17 par 5 .