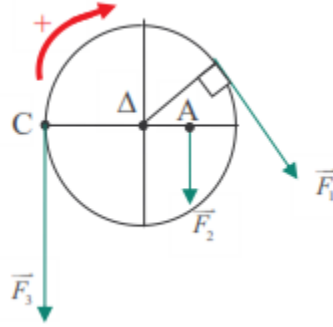


تصحيح تمارين توازن جسم صلب قابل للدوران حول محور ثابت

تمرين 1:

حساب عزم كل قوة :



$$M_{\Delta}(\vec{F}_1) = F_1 \cdot R \Rightarrow M_{\Delta}(\vec{F}_1) = 2 \times 20 \cdot 10^{-2} = 0,4 N \cdot m$$

$$M_{\Delta}(\vec{F}_2) = F_2 \cdot \frac{R}{2} \Rightarrow M_{\Delta}(\vec{F}_2) = 1 \times 10 \cdot 10^{-2} = 0,1 N \cdot m$$

$$M_{\Delta}(\vec{F}_3) = -F_3 \cdot R = -2,5 \times 20 \cdot 10^{-2} = -0,5 N \cdot m$$

2- مجموع عزوم القوى المطبقة على العاضة :

تضع العارضة الى القوى الثلاث ووزنها \vec{P} و المحور: \vec{R} .

بما أن: $M_{\Delta}(\vec{P}) = 0$ و $M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$ لأن خط تأثير القوتان يمر من محور الدوان Δ .

مبرهنة العزوم تكتب :

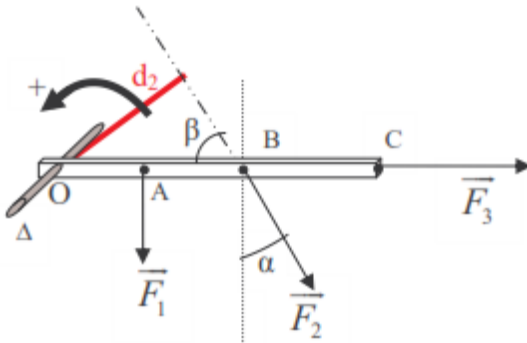
$$\sum \vec{F} = M_{\Delta}(\vec{R}) + M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{F}_1) + M_{\Delta}(\vec{F}_2) + M_{\Delta}(\vec{F}_3)$$

$$\sum \vec{F} = 0 + 0 + 0,4 + 0,1 - 0,5 = 0$$

وبالتالي مبرهنة العزوم تتحقق .

تمرين 2:

1- حساب عزم كل قوة بالنسبة لمحور الدوران Δ :



$$M_{\Delta}(\vec{F}_1) = -F_1 \cdot OA$$

$$M_{\Delta}(\vec{F}_1) = -17 \times 16.10^{-2} = -2,72 N.m \quad \text{ت.ع:}$$

$$M_{\Delta}(\vec{F}_2) = -F_2 \cdot d_2$$

$$\sin \beta = \frac{d_2}{OB} \Rightarrow d_2 = OB \sin \beta$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$M_{\Delta}(\vec{F}_2) = -F_2 \cdot OB \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$M_{\Delta}(F_2) = -25 \times 37.10^{-2} \times \sin(90^\circ - 30^\circ) = -8,01 N.m \quad \text{ت.ع:}$$

$$M_{\Delta}(\vec{F}_3) = 0$$

لأن خط تأثير القوة \vec{F}_3 يقطع محور الدوران Δ .

2- حساب مجموع عزوم القوى:

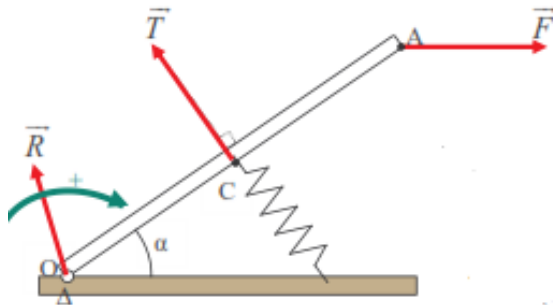
باعتبار وزن العارضة مهملاً نكتب:

$$\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = M_{\Delta}(\vec{F}_1) + M_{\Delta}(\vec{F}_2) + M_{\Delta}(\vec{F}_3)$$

$$\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = -2,72 - 8,01 + 0 = -10,73 N.m$$

بما أن مجموع عزوم القوى المطبقة على العارضة غير منعدم فإن العارضة لا توجد في حالة توازن

تمرين 3:



- جرد القوى :

تخضع العارضة OA لثلاث قوى :

- القوة (A, \vec{F})

- القوة (C, \vec{T}) المطبقة من طرف النابض ، اتجاهها

عمودي على العارضة ومنحاتها نحو الأعلى لأن

النابض مضغوط .

- القوة (B, \vec{R}) المطبقة من طرف المحور Δ .

2- حساب شدة توتر النابض :

3-

العارضة في توازن مبرهنة العزوم نكتب :

$$\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = 0 \Rightarrow M_{\Delta}(\vec{R}) + M_{\Delta}(\vec{F}) + M_{\Delta}(\vec{T}) = 0$$

نختار المنحنى الموجب للدوران كما يبين الشكل .

لدينا : $M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$ لأن خط تأثير هذه القوة يتقاطع مع محور الدوران Δ

$$\sin \alpha = \frac{d}{L} \Rightarrow d = L \sin \alpha \Rightarrow M_{\Delta}(\vec{F}) = F \cdot L \cdot \sin \alpha$$

$$M_{\Delta}(\vec{T}) = -T d' = -T \frac{L}{2}$$

مبرهنة العزوم تصبح :

$$0 + F \cdot L \cdot \sin \alpha - T \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow T = 2F \sin \alpha$$

تطبيق عددي :

$$T = 2 \times 20 \times \sin(30^\circ) = 20N$$

3- استنتاج صلابة النابض :

نعلم أن توتر النابض يكتب :

$$T = k |\Delta \ell| \quad \text{حيث } k \text{ صلابة النابض و } \Delta \ell \text{ تقلص النابض } \Delta \ell = -8cm < 0$$

$$k = \frac{T}{|\Delta \ell|} = \frac{20}{8 \cdot 10^{-2}} = 125 N/kg$$

تمرين 4:

- بالنسبة للمحاولة الأولى :

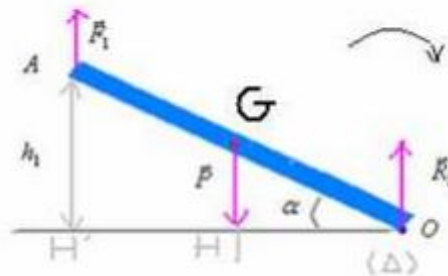
1-1 القوى المطبقة على العارضة عند التوازن :

\vec{P} : وزن العارضة وهي قوة عن بعد .

\vec{F}_1 : القوة المطبقة من طرف العامل على العارضة في النقطة A وهي قوة تماس .

\vec{R}_1 : القوة المطبقة من طرف الأرض على العارضة في النقطة O وهي قوة التماس .

أنظر الشكل :



2-1 تعابير عزوم القوى بالنسبة للمحور Δ المار من O نقطة الارتكاز :

$$M_{\Delta}(\vec{R}_1) = 0 \quad \text{لان خط تأثير القوة } \vec{R}_1 \text{ يمر من محور الدوران .}$$

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = P \cdot OH$$

تعبير OH لدينا : $\cos \alpha = \frac{OH}{OG}$ مع $OG = \frac{L}{2}$ ومنه : $OH = OG \cdot \cos \alpha = \frac{L}{2} \cos \alpha$

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = -P \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos \alpha$$

$$M_{\Delta}(\vec{F}_1) = F_1 \cdot OH'$$

تعبير OH' لدينا : $\cos \alpha = \frac{OH'}{OA} = \frac{OH'}{L}$ ومنه : $OH' = L \cdot \cos \alpha$

$$M_{\Delta}(\vec{F}_1) = F_1 \cdot L \cdot \cos \alpha$$

3-1- نبين أن : $F_1 = \frac{P}{2}$

بما أن العارضة في توازن فإن مبرهنة العزوم تتحقق :

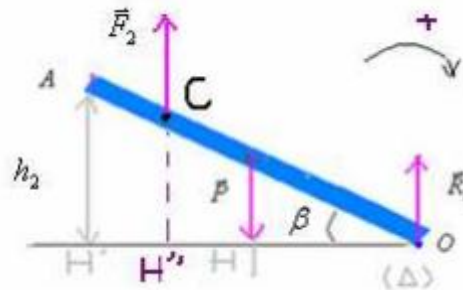
$$M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}_1) + M_{\Delta}(\vec{F}_1) = 0$$

$$-P \cdot \frac{L}{2} \cos \alpha + 0 + F_1 \cdot L \cdot \cos \alpha = 0$$

$$F_1 \cdot L \cdot \cos \alpha = P \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos \alpha$$

نستنتج : $F_1 = \frac{P}{2}$

نستنتج أنه عندما تصبح شدة القوة F_1 مساوية لنص وزن العارضة تصبح هذه الأخيرة في توازن .
3- بالنسبة للمحاولة الثانية :



$M_{\Delta}(\vec{R}_2) = 0$ لأن خط تأثير القوة \vec{R}_2 يمر من المحور

$M_{\Delta}(\vec{P}) = -P \cdot OH$ مع : $\cos \beta = \frac{OH}{OG}$ و $OG = \frac{L}{2}$ أي : $OH = OG \cdot \cos \beta = \frac{L}{2} \cos \beta$

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = -P \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos \beta$$

$M_{\Delta}(\vec{F}_2) = F_2 \cdot OH''$ مع : $\cos \beta = \frac{OH''}{OC}$ و $OC = \frac{3}{4}L$ أي : $OH'' = OC \cdot \cos \beta = \frac{3}{4}L \cdot \cos \beta$

$$M_{\Delta}(\vec{F}_2) = \frac{3}{4} F_2 L \cos \beta$$

3-1- العارضة في توازن وبالتالي يكون المجموع الجبري لعزوم القوى منعدم .

$$M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}_2) + M_{\Delta}(\vec{F}_2) = 0$$

$$-P \cdot \frac{L}{2} \cos\beta + 0 + \frac{3}{4} F_2 \cdot L \cdot \cos\beta = 0$$

$$\frac{3}{4} F_2 \cdot L \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} P \cdot L \cdot \cos\beta$$

$$F_2 = \frac{2}{3} P$$

نستنتج أنه كلما اقتربنا من محور الدوران كلما ازدادت شدة القوة التي يطبقها العامل.
2-3- حساب h_2 :

$$\sin\alpha = \frac{h_1}{L} \quad \text{لدينا : (1)}$$

$$\sin\beta = \frac{h_2}{L} \quad \text{و (2)}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{h_2}{L} \times \frac{L}{h_1}$$

$$h_2 = h_1 \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$h_2 = 60 \times \frac{\sin(30^\circ)}{\sin(60^\circ)}$$

ت.ع :

$$h_2 = 34,6 \text{ cm}$$

تمرين 5 :

1- جرد القوى :

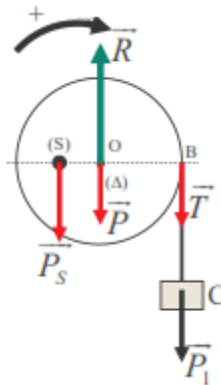
يوجد القرص في توازن تحت تأثير ثلاث قوى :

\vec{P} : وزنه .

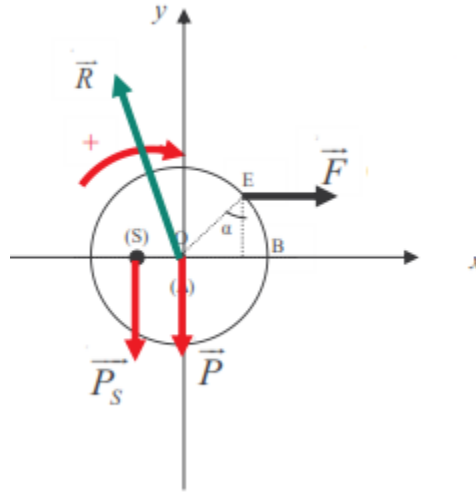
\vec{R} : تأثير محور الدوران Δ .

\vec{T} : توتر الخيط .

\vec{P}_S : وزن الجسم S .



2- تحديد العلاقة بين m و m_1 :



بمأن القرص في توازن فإن مبرهنة العزوم تكتب :

$$\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) + M_{\Delta}(\vec{P}_s) + M_{\Delta}(\vec{T}) = 0 \quad (1)$$

$$M_{\Delta}(\vec{R}) = 0 \quad , \quad M_{\Delta}(\vec{P}) = 0$$

$$M_{\Delta}(\vec{P}_s) = -P_s \cdot \frac{r}{2} = -mg \frac{r}{2}$$

$$M_{\Delta}(\vec{T}) = +Tr$$

توازن الجسم C يمكننا من كتابة : $T = P_1 = m_1 \cdot g$

$$M_{\Delta}(\vec{T}) = m_1 \cdot g \cdot r$$

العلاقة (1) تكتب :

$$0 + 0 - mg \frac{r}{2} + m_1 gr = 0$$

$$mg \frac{r}{2} = m_1 gr$$

$$m = 2m_1$$

$$m_1 = 2 \times 20 = 40g$$

1-3 تعبير عزم القوة \vec{F} :

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = +Fd$$

$$\cos \alpha = \frac{d}{r} \Rightarrow d = r \cos \alpha$$

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = F \cdot r \cdot \cos \alpha$$

2-3 مبرهنة العزوم تكتب :

$$\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = 0 \Rightarrow M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) + M_{\Delta}(\vec{P}_S) + M_{\Delta}(\vec{F}) = 0 \quad (1)$$
$$M_{\Delta}(\vec{R}) = 0 \quad \text{و} \quad M_{\Delta}(\vec{P}) = 0$$

المعادلة (1) تكتب :

$$0 + 0 - mg \frac{r}{2} + Fr \cos \alpha = 0$$

$$F \cos \alpha = \frac{1}{2} mg$$

$$F = \frac{mg}{2 \cos \alpha} = \frac{40 \cdot 10^{-3} \times 10}{2 \cos(60^\circ)}$$

$$F = 0,4 \text{ N}$$

3-3 تحديد مميزات القوة \vec{R} :

حسب الشرط الأول لسكون مركز قصور القرص :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{P}_S + \vec{F} = \vec{0}$$

اسقاط العلاقة على المحور Ox :

$$P_x + R_x + P_{Sx} + F_x = 0$$

مع : $P_x = 0$ و $P_{Sx} = 0$ و $F_x = F$ ومنه $R_x + F = 0$ أي $R_x = -F$
اسقاط العلاقة على المحور Oy :

$$P_y + R_y + P_{Sy} + F_y = 0$$

مع : $P_y = -P$ و $P_{Sy} = -P_S$ و $F_y = 0$ ومنه $0 + R_y - P - P_S = 0 \Leftrightarrow R_y = P + P_S$
منظم \vec{R} :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{F^2 + (P + P_S)^2}$$

تطبيق عددي :

$$R = \sqrt{0,4^2 + (1 + 40 \cdot 10^{-3} \times 10)^2} = 1,46 \text{ N}$$

اتجاه \vec{R} يكن زاوية β مع المحور Oy بحيث :

$$\tan \beta = \frac{R_x}{R_y} = \frac{F}{P + P_S}$$

$$\tan \beta = \frac{0,4}{1 + 40 \cdot 10^{-3} \times 10} = 0,29 \Rightarrow \beta = 15,9^\circ$$

مميزات القوة \vec{R} :

- نقطة التأثير : O
- خط التأثير : يكون زاوية β مع الخط الرأسي المار من O .
- المنحى : نحو الأعلى .
- الشدة : $R = 1,46 \text{ N}$

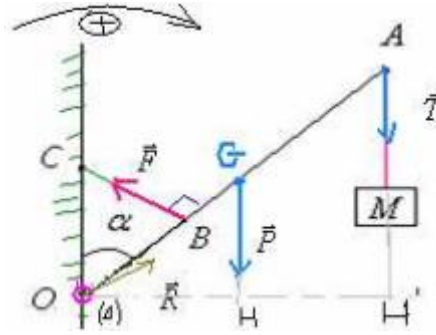
تمرين 6 :

1- جرد القوى المطبقة على العارضة (OA) :
 \vec{P} : وزن العارضة .

\vec{T} : القوة المطبقة من طرف الخيط في النقطة A .

\vec{F} : القوة المطبقة من طرف الحبل الحديدي في النقطة B .

\vec{R} : تأثير محور الدوران (Δ) في النقطة O .



دراسة توازن الجسم المعلق M يمكن من كتابة $T=P=Mg$

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = -F.OB = -F.\frac{L}{4}$$

2- إيجاد شدة القوة \vec{F} :

بما أن العارضة في حالة توازن ، فإن مبرهنة العزوم تكتب :

$$\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{T}) + M_{\Delta}(\vec{F}) + M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$$

من خلال توازن الجسم المعلق M فإن $T=P=mg$

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = -F.OB = -F.\frac{L}{4}$$

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = P.OH = P.\frac{L}{2}.\sin \alpha = Mg.\frac{L}{2}.\sin \alpha$$

$$M_{\Delta}(\vec{T}) = T.OH = T.L.\sin \alpha = mg.L.\sin \alpha$$

$$M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$$

مبرهنة العزوم تصبح :

$$Mg.\frac{L}{2}.\sin \alpha + mg.L.\sin \alpha - F.\frac{L}{4} + 0 = 0$$

$$F.\frac{1}{4} = \frac{Mg}{2}\sin \alpha + mg\sin \alpha$$

$$F = 4\left(\frac{Mg}{2}\sin \alpha + mg\sin \alpha\right)$$

$$F = g \cdot \sin \alpha (2M + 4m)$$

$$F = 2g \cdot \sin \alpha (M + 2m)$$

$$F = 10 \cdot \sin(30^\circ)(2 + 2 \times 3) = 80 \text{ N}$$

ت.ع:

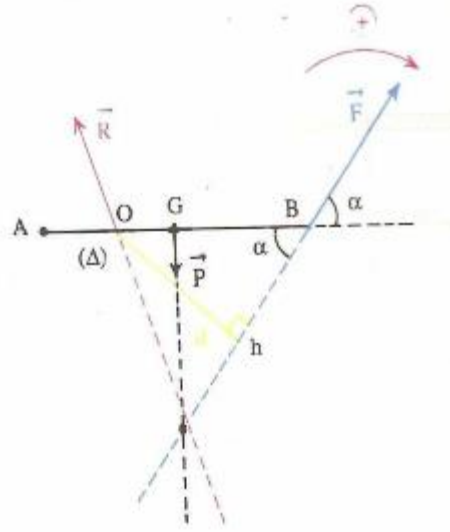
تمرين 7 :

لتحديد قيمة القيمة m المعلقة بالخيط ندرس توازن القضيب AB الذي يخضع للقوى التالية :

\vec{P} : تأثير الأرض :

\vec{R} : تأثير المحور (Δ)

\vec{F} : تأثير الخيط :



حسب مبرهنة العزوم نكتب :

$$\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = 0 \Rightarrow M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) + M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$$

لدينا : $M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$ لأن \vec{R} تقاطع محور الدوران .

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = P \cdot OG = P \cdot \frac{AB}{2} \quad \text{كما أن :}$$

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = -F \cdot d \quad \text{و :}$$

$$\sin \alpha = \frac{OH}{OB} \Leftrightarrow OH = OB \cdot \sin \alpha \text{ و } d = OH$$

F هي دة وزن الكتلة المعلقة لأن البكر تغير اتجاه القوة دون تغيير شدتها .

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = -mg \cdot OB \cdot \sin \alpha \quad \text{إذن : } F = mg$$

مبرهنة العزوم تكتب :

$$P \cdot OA - mg \cdot OB \cdot \sin \alpha = 0 \Leftrightarrow mg \cdot OB \cdot \sin \alpha = P \cdot OA$$

$$m = \frac{P.OA}{g.OB.\sin\alpha}$$

نعلم أن : $OG = \frac{AB}{2}$ و $OB = AB - OA$

تعبير m يصبح :

$$m = \frac{P(\frac{AB}{2} - OA)}{g(AB - OA)\sin\alpha} = \frac{40(\frac{80}{2} - 20)}{10(80 - 20)\sin 30^\circ} = 2,72 \text{ kg}$$

تمرين 8 :

1- جرد القوى :

تخضع الساق لثلاث قوى :

- وزن الساق \vec{P}

- القوة المطبقة من طرف النابض : \vec{T}

- القوة المطبقة من طرف المحور (Δ) : \vec{R}

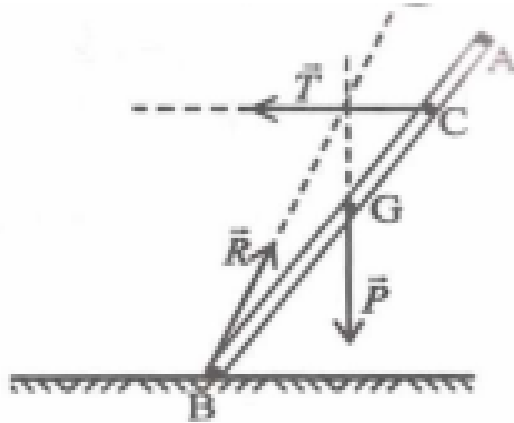
2- تمثيل اتجاهات القوى :

بما لأن الساق في توازن فإن خطوط تأثير القوى الثلاث متلاقية في نقطة واحدة

- مثل أولا خط تأثير الوزن \vec{P} وهو رأسي ومار من G .

- نمثل ثانيا خط تأثير \vec{T} وهو أفقي مار من C و I .

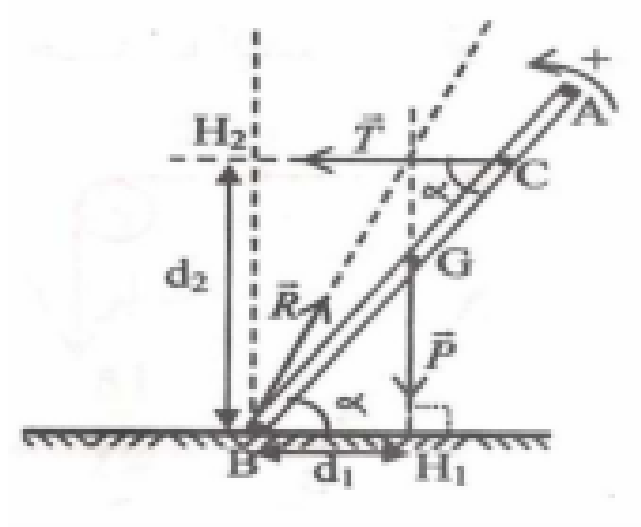
- وأخيرا نمثل \vec{R} يمر من B و I نقطة تلاقي جميع خطوط التأثير .



3- أثبات تعبير توتر النابض T :

الساق في توازن ، حسب شرط التوازن نكتب :

$$M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{T}) + M_{\Delta}(\vec{R}) = 0(1)$$



$M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$ لأن اتجاه \vec{R} يقطع محور الدوران .

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = -Pd_1$$

$$\cos \alpha = \frac{d_1}{BG} \Rightarrow d_1 = BG \cdot \cos \alpha$$

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = -mg \cdot BG \cdot \cos \alpha$$

$$M_{\Delta}(\vec{T}) = T \cdot d_2$$

$$\sin \alpha = \frac{d_2}{BC} \Rightarrow d_2 = BC \cdot \sin \alpha$$

$$M_{\Delta}(\vec{T}) = T \cdot BC \cdot \sin \alpha$$

العلاقة (1) تكتب :

$$-mg \cdot BG \cdot \cos \alpha + T \cdot BC \cdot \sin \alpha + 0 = 0$$

نعلم أن : $BC = \frac{L}{3}$ و $BG = \frac{L}{2}$

$$-mg \frac{L}{2} \cos \alpha + T \frac{L}{3} \sin \alpha = 0$$

$$-\frac{1}{2} mg \cos \alpha + \frac{1}{3} T \sin \alpha = 0$$

$$\frac{1}{3} T \sin \alpha = \frac{1}{2} mg \cdot \cos \alpha$$

$$T = \frac{3}{2} \frac{mg \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{3 \times 0,82 \times 10 \sin 45^\circ}{2 \sin 45^\circ} = 12,3 \text{ N}$$

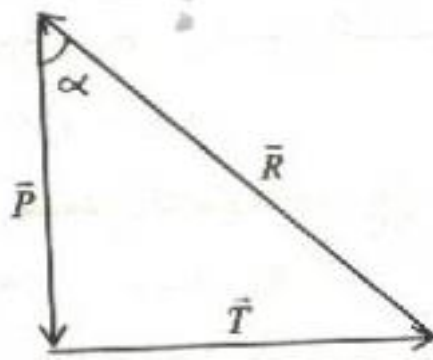
4- صلابة النابض :

$$T = k\Delta\ell \Rightarrow k = \frac{T}{\Delta\ell} = \frac{12,3}{6 \cdot 10^{-2}} = \frac{205N}{m}$$

$$T = 2,05 \cdot 10^2 N/m$$

4- مميزات القوة \vec{R} :

بما ان القوتين \vec{P} و \vec{T} متعامدان فإن الخط المضلعي هو كالتالي :



نمثل القوى بدون سلم .

مميزات القوة \vec{R} :

➤ نقطة التأثير : B

➤ خط التأثير : الإتجاه يكون زاوية α مع الخط الراسي ، حيث : $\tan\alpha = \frac{T}{P} = \frac{12,3}{0,82 \times 10} = 1,5$

ومنه : $\alpha = 56,3^\circ$

➤ المنحى : الى الأعلى نحو اليسار .

➤ الشدة : $R = \sqrt{P^2 + T^2} = \sqrt{12,3^2 + 8,2^2} = 14,8N$

تمرين 9:

1- جرد القوى :

يخضع القرص للقوى التالية :

- وزنه : \vec{P}
- تأثير السلك : \vec{R}
- المزدوجة : (\vec{F}_1, \vec{F}_2)
- مزدوجة اللي التي تقاوم السلك :

2- عزم مزدوجة قوتين (\vec{F}_1, \vec{F}_2) :

باعتبار المنحى الموجب للدوران ، تعبير مزدوجة قوتين هو :

$$M_{\Delta}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = F_1 \cdot d = F_2 \cdot d$$

الشدة المشتركة للقوتين : $F = F_1 = F_2$ و $d = AB = 2r$

$$M_{\Delta}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 2F \cdot r$$

3- تعبير M_C عزم مزدوجة اللي :

بتطبيق الشرط الثاني للتوازن ، نكتب :

$$M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) + M_{\Delta}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) + M_C = 0$$

مع : $M_{\Delta}(\vec{P}) = 0$ و $M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$ لأن اتجاههما يمر من محور الدوران .
 $M_C + 2F_1r = 0$

$$M_C = -2F_1 \cdot r$$

العزم سالب مما يدل أن مزدوجة اللي تقاوم لي السلك .

4- تعبير C ثابتة لي السلك :

لدينا : $M_{\Delta} = -2F_1 \cdot r$ و $M_{\Delta} = -C\theta$ ومنه : $-C\theta = -2F_1r$

$$C = \frac{2F_1r}{\theta} \Leftarrow$$

5.1- حساب قيمة C :

$$M_{\Delta} = -C\theta \Leftarrow C = -\frac{M_{\Delta}}{\theta}$$

مبانيا نجد عند $\theta = 0,2 \text{ rad}$ القيمة : $M_C = 16 \cdot 10^{-2} \text{ N.m}$
ت.ع:

$$C = -\frac{(-16 \cdot 10^{-2})}{0,2} = 0,8 \text{ N/rad}$$

5.2- حساب الشدة F_1 :

$$c = \frac{2F_1r}{\theta} F_1 = \frac{C\theta}{2r} \Leftarrow C\theta = 2F_1r \Leftarrow$$

ت.ع:

$$F_1 = \frac{0,8 \times 0,5}{2 \times 0,1} = 2 \text{ N}$$