



الهندسة

مذكرة رقم 15 : ملخص لدرس: الهندسة الفضائية مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :

توجيهات تربوية	القدرات المنتظرة	محتوى البرنامج
- انطلاقا من دراسة بعض الأشكال والمجسمات الاعتيادية من الفضاء ودراسة بعض المقاطع المستوية يتمكن التلاميذ من إبراز النتائج المتعلقة بالأوضاع النسبية للمستقيمتين والمستويات في الفضاء (التوازي، التعمد، التقاطع) واستقراء التعاريف والخصائص المتعلقة بالتوازي والتعمد في الفضاء. - ينبغي الالتزام بالحد الأدنى الضروري من خصائص الفضاء (الخصائص والتعاريف والموضوعات الأساسية). - ينبغي ضبط بعض التقنيات والقواعد التي تتحكم في رسم الأشكال الفضائية على المستوى (دور الخطوط المتصلة والخطوط المنقطعة...). - يتعين الانتقال التدريجي من مستوى التجربة والملاحظة إلى مستوى البرهان الرياضي. - تعتبر جميع صيغ المساحات والحجوم مقبولة في هذا المستوى. - يمكن الاستئناس في حدود المتوفر بالمؤسسات التعليمية، ببعض البرانم المعلوماتية المندمجة في الحاسوب لتحديد المقاطع المستوية لبعض المجسمات من الفضاء.	- تعرف وتمثيل أجزاء في الفضاء على المستوى. - إدراك حالات المماثلة وحالات اللامماثلة بين مفاهيم وخصائص في المستوى ونظيراتها في الفضاء. - توظيف خصائص الهندسة الفضائية في حل مسائل مستقاة من الواقع.	- موضوعات التلاقي، تحديد مستوى في الفضاء؛ - الأوضاع النسبية للمستقيمتين والمستويات في الفضاء؛ - خصائص التوازي والتقاطع؛ - التعمد: تعامد مستقيم ومستوى، تعامد مستويين؛ - خصائص التعمد والتوازي؛

II. الأوضاع النسبية في الفضاء:

الأوضاع النسبية لمستقيمتين: ليكن (D) و (Δ) مستقيمتين من الفضاء (E) لدينا ثلاث وضعيات ممكنة:

- (D) و (Δ) متوازيان يعني $(D) \cap (\Delta) = \emptyset$
- (D) و (Δ) متقاطعان يعني $(D) \cap (\Delta) = \{I\}$
- (D) و (Δ) غير مستوئليان يعني (D) يخترق المستوى
- (P) الذي يضم المستقيم (Δ) في نقطة I لا تنتمي إلى (Δ) .

1. الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى:

ليكن (D) مستقيما و (P) مستوى من الفضاء (E) لدينا حالات ممكنة:

- المستقيم (D) ضمن (P) ونكتب $(D) \subset (P)$
- المستقيم (D) خارج (P) ونكتب $(D) \cap (P) = \emptyset$
- المستقيم (D) يخترق (P) ومنه $(D) \cap (P) = \{I\}$

2. الأوضاع النسبية لمستويين من الفضاء:

ليكن (P) و (Q) مستويين مختلفين من الفضاء (E) لدينا حالتين:
 (P) و (Q) منفصلان (متوازيان قطعا) أو (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم

I. موضوعات الهندسة الفضائية: نرسم ب (E) إلى الفضاء.

- من نقطتين مختلفتين A و B من الفضاء (E) يمر مستقيم وحيد (AB) .
- من ثلاث نقط غير مستقيمية من الفضاء (E) يمر مستوى وحيد يرمز له ب (ABC) .
- إذا احتوى مستوى (P) من الفضاء (E) على نقطتين A و B فإنه يتضمن المستقيم (AB) .
- يعني إذا كان $A \in (P)$ و $B \in (P)$ فإن $(AB) \subset (P)$.
- إذا اشترك مستويان مختلفان من الفضاء (E) في نقطة A فإنهما يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يمر من A .
- إذا كان $\left. \begin{matrix} A \in (P) \text{ و } A \in (Q) \text{ فإن } (P) \cap (Q) = \{A\} \\ A \in (\Delta) \end{matrix} \right\}$
- جميع خصائص الهندسة الفضائية تبقى صحيحة في كل مستوى من الفضاء (E) .

نتائج: يحدد مستوى في الفضاء إما:

بثلاث نقط غير مستقيمية.

بمستقيم و نقطة لا تنتمي إليه.

← بمستقيمتين متقاطعتين.

← بمستقيمتين متوازيين قطعا.

III. التوازي في الفضاء:

1. **توازي مستقيمين:** يكون مستقيمان (D) و (D') متوازيين إذا و فقط إذا كانا مستوائيين منطبقان أو منفصلان و نكتب $(D) \parallel (D')$.

خصائص و مبرهنات: كل مستقيمان متوازيان قطعاً يحددان مستوى و حيد في الفضاء.

■ إذا كان مستقيمان متوازيين فإن أي مستقيم يوازي أحدهما يوازي الآخر و $(D) \parallel (D') \Rightarrow (D') \parallel (\Delta)$ إذن $(D) \parallel (D')$

2. **توازي مستقيم و مستوى:** يكون مستقيم (D) موازياً لمستوى (P) إذا و فقط إذا كان (D) ضمن (P) أو كان (D) و (P) منفصلان و نكتب $(D) \parallel (P)$ و $(P) \cap (Q) = \emptyset$.

خصائص و مبرهنات: يكون مستقيم (D) موازياً لمستوى (P) إذا و فقط إذا (D) وجد مستقيم (Δ) ضمن (P) يوازي المستقيم (D) .

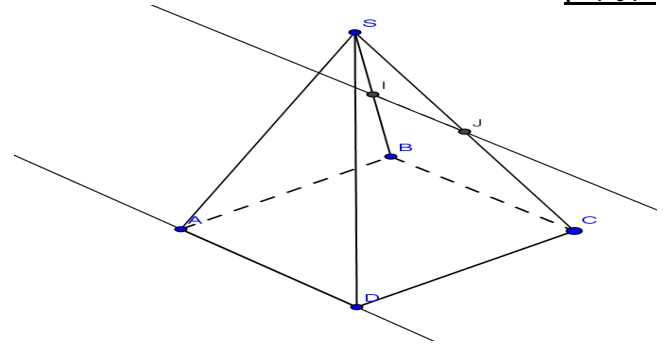
تمرين 1:

ليكن $SABCD$ هرما قاعدته متوازي الأضلاع $ABCD$ و لتكن I و J منتصفي القطعتين $[SB]$ و $[SC]$ على التوالي.

(1) بين أن $(AD) \parallel (IJ)$

(2) أثبت أن $(IJ) \parallel (ADS)$

(الجواب 1)



في المثلث SBC لدينا I منتصف $[SB]$ و J منتصف $[SC]$ إذن $(IJ) \parallel (BC)$ و لدينا $ABCD$ متوازي أضلاع إذن $(BC) \parallel (AD)$ و منه أن $(AD) \parallel (IJ)$ (1)

لدينا $A \in (ADS)$ و $D \in (ADS)$ إذن $(AD) \subset (ADS)$ من (1) و (2) نستنتج أن: $(IJ) \parallel (ADS)$

3. **توازي مستويين:** يكون مستويان (P) و (Q) متوازيين إذا و فقط إذا كانا منطبقين أو منفصلين و نكتب $(P) \parallel (Q)$.

$(P) \parallel (Q) \Leftrightarrow (P) \cap (Q) = \emptyset$ أو $(P) = (Q)$.

خصائص و مبرهنات: يكون مستويان من الفضاء متوازيين إذا و فقط إذا اشتمل أحدهما على مستقيمين متقاطعين و موازيين للآخر.

■ إذا كان مستويان متوازيين فإن أي مستوى يقطع أحدهما يقطع الآخر و يكون مستقيماً تقاطعهما مع هذا المستوى متوازيين.

■ إذا كان مستويان متوازيين فإن أي مستقيم يخترق أحدهما يخترق الآخر.

■ إذا اشتمل مستويان متقاطعان على مستقيمين متوازيين قطعاً فإن تقاطعهما يكون مستقيماً موازياً لهذين المستقيمين (مبرهنة السقف).

إذا كان $\left. \begin{array}{l} (D') \subset (P') \text{ و } (D) \subset (P) \\ (D) \parallel (\Delta) \text{ و } (D') \parallel (\Delta) \end{array} \right\}$ فإن $(D) \parallel (\Delta) \parallel (D')$

إذا كان $\left. \begin{array}{l} (D') \parallel (D) \\ (P) \cap (P') = (\Delta) \end{array} \right\}$

■ إذا وازى مستويان مستوى ثالثاً فإنهما يكونان متوازيين.

تمرين 2: ليكن $ABCD$ رباعي أوجه و لتكن I منتصف القطعة $[AC]$

و J منتصف القطعة $[AB]$ و K منتصف القطعة $[AD]$

(1) أنشئ شكلاً مناسباً.

(2) بين أن $(BCD) \parallel (IJK)$

(الجواب 1)

في المثلث ABC

لدينا I منتصف $[AC]$ و J

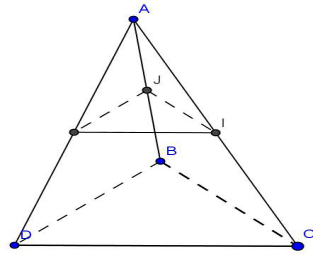
منتصف $[AB]$ إذن

$(IJ) \parallel (BC)$

و لدينا في المثلث ABD

K منتصف $[AD]$ و J

منتصف $[AB]$ إذن $(JK) \parallel (BD)$



و لدينا: $(IJ) \parallel (BC)$ و $(BC) \subset (BCD)$ إذن $(IJ) \parallel (BCD)$ (1)

و لدينا: $(JK) \parallel (BD)$ و $(BD) \subset (BCD)$ إذن $(JK) \parallel (BCD)$ (2)

و لدينا: $(IJ) \cap (JK) = \{J\}$ (3)

و لدينا: $(IJ) \subset (IJK)$ و $(JK) \subset (IJK)$ (4)

إذن (1) و (2) و (3) و (4) نستنتج أن: $(BCD) \parallel (IJK)$

IV. التعامد في الفضاء:

1. تعامد مستقيمين:

نقول بأن مستقيمين (D) و (Δ) من الفضاء متعامدان إذا و فقط إذا كان

الموازيان لهما في أية نقطة من الفضاء متعامدين و نكتب: $(D) \perp (\Delta)$

$(D') \subset (P)$ و $(\Delta') \subset (P)$

$(D) \parallel (D')$ و $(\Delta) \parallel (\Delta')$

$(\Delta') \perp (D')$ يعني $(D) \perp (\Delta)$

خاصية: إذا كان مستقيمان متوازيان فإن كل مستقيم متعامد مع أحدهما يكون متعامداً مع الآخر.

تمرين 3: ليكن $ABCD$ رباعي أوجه حيث: $BD = DC$ و لتكن I

منتصف القطعة $[AB]$ و J منتصف القطعة $[AC]$ و K منتصف

القطعة $[BC]$

(1) أنشئ شكلاً مناسباً.

(2) بين أن $(DK) \perp (IJ)$

(الجواب 1)

في المثلث ABC لدينا I منتصف

$[AB]$ و J منتصف $[AC]$ إذن

$(IJ) \parallel (BC)$ (1)

و في المثلث BCD

لدينا $BD = DC$ و K منتصف

القطعة $[BC]$ إذن:

$(DK) \perp (BC)$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن: $(DK) \perp (IJ)$

2. المستقيمتان و المستويان المتعامدان:

نقول بأن مستقيماً (D) عمودياً على مستوى (P) إذا و فقط إذا كان متعامداً

مع جميع مستقيمتان المستوى (P) و نكتب: $(D) \perp (P)$

خصائص و مبرهنات: يكون مستقيم (D) عمودياً على مستوى (P) إذا و فقط

إذا كان متعامداً مع مستقيمين متقاطعين ضمن (P) .

إذا كان مستقيمان متوازيين فإن أي مستوى عمودي على أحدهما يكون عموديا على الآخر.

$(D) \perp (\Delta_2)$ و $(D) \perp (\Delta_1)$, $(\Delta_2) \subset (P)$ و $(\Delta_1) \subset (P)$ و منه $(D) \perp (P)$

■ **المستويات المتعامدة:** نقول بأن مستوى (P) على مستوى (Q) إذا تضمن أحدهما مستقيما عموديا على الآخر و نكتب: $(D) \perp (Q)$

خاصيات و مبرهنات:

• إذا كان مستقيم (D) عموديا على مستوى (P) فإن كل مستوى مار من (D) يكون عموديا على (P) .

• إذا كان مستوى (P) عموديا على مستوى (Q) فإن كل مستقيم ضمن أحدهما عمودي على مستقيم التقاطع يكون عموديا على الآخر.
• إذا كان مستوى عموديا على مستويين متقاطعين فإن هذا المستوى يكون عموديا على مستقيم التقاطع.

تمرين 4: ليكن $ABCD$ شبه منحرف قطراه $[AC]$ و $[BD]$ يتقاطعان في I . لتكن S نقطة من الفضاء لا تنتمي إلى المستوى (ABC) بحيث يكون $(SI) \perp (ABC)$

(1) حدد تقاطع المستويين (SAC) و (SBD) وحدد تقاطع المستويين (SAB) و (SDC) .

(2) تحقق أن $(AB) \perp (SI)$ وبين أن المستويين (SAC) و (ABC) متعامدان.

(3) نفترض أن المثلث ABC قائم الزاوية في B و أن $SI = 3$ و $CD = 3, AB = 2, BC = \frac{1}{4}$.

أحسب حجم الهرم $SABCD$.

الجواب:

(1) لدينا $(SAC) \neq (SBD)$ لأن النقط S, A, B, C و D غير مستوائية.

لدينا: $S \in (SAC)$

و $S \in (SBD)$

و لدينا $I \in (AC)$ و $I \in (SAC)$ إذن $I \in (SAC)$

و لدينا $I \in (BD)$ و $I \in (SBD)$ إذن $I \in (SBD)$

إذن المستويان (SAC) و (SBD) يشتركان في النقطتين S و I .

إذن $(SAC) \cap (SBD) = (SI)$

ب) لدينا $S \in (SAB)$ و $S \in (SDC)$

و لدينا $(AB) \subset (SAB)$ و $(AB) \subset (SDC)$ و $(DC) \parallel (AB)$.

إذن (SAB) و (SDC) يتقاطعان في مستقيم يمر من S و يوازي المستقيمين (AB) و (DC) . حسب مبرهنة السقف.

(2) لدينا $(SI) \perp (ABC)$ و $(SI) \perp (AB)$.

إذن $(SI) \perp (AB)$

ب) لدينا $(SI) \perp (SAC)$ و $(SI) \perp (AC)$

إذن $(SI) \perp (ABC)$ و منه فإن $(ABC) \perp (SAC)$

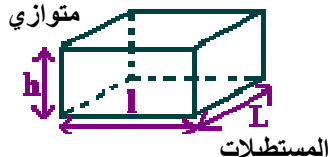
(3) $((AB) \perp (BC))$ و منه مساحة شبه المنحرف $ABCD$

$$S = \frac{(DC + AB) \times BC}{2} = \frac{(3+2) \times \frac{1}{4}}{2} = \frac{5}{8} \text{ هي:}$$

(لأن ارتفاعه هو BC) ومنه حجم الهرم $SABCD$ هو: $V = \frac{1}{3} \cdot S \times (SI)$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{8}\right) \cdot 3 = \frac{5}{8} \text{ أي:}$$

I. المساحة و الحجم: مساحات و أحجام بعض المجسمات الاعتيادية:
الموشور القائم، متوازي المستطيلات، المكعب، الهرم رباعي الأوجه المنتظم و المخروط الدوراني:



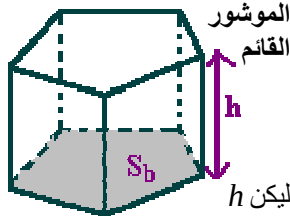
متوازي المستطيلات
ليكن L و l و h على التوالي طول و عرض و ارتفاع متوازي المستطيلات.
المساحة الجانبية:

$$S_l = 2(l + L) \times h$$

المساحة الكلية:

$$S_T = 2(l + L) \times h + 2l \times L$$

$$V = L \times l \times h \text{ الحجم:}$$



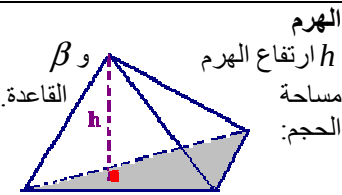
الموشور القائم
ليكن h ارتفاع الموشور و l محيط قاعدته و S_b مساحة قاعدته.

$$S_l = l \times h \text{ المساحة الجانبية:}$$

المساحة الكلية:

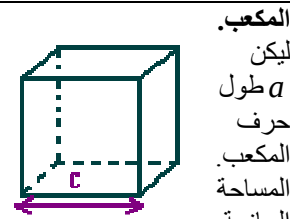
$$S_T = l \times h + 2S_b$$

$$V = S_b \times h \text{ الحجم:}$$



الهرم
ارتفاع الهرم h
مساحة القاعدة β
الحجم:

$$V = \frac{1}{3} \beta \times h$$

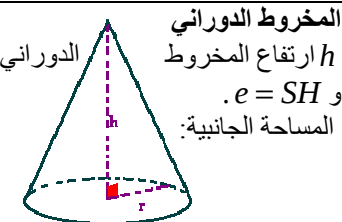


المكعب.
ليكن a طول حرف المكعب.
المساحة الجانبية:

$$S_l = 4a^2$$

$$S_T = 6a^2 \text{ المساحة الكلية:}$$

$$V = a^3 \text{ الحجم:}$$



المخروط الدوراني
ارتفاع المخروط h
و $e = SH$
المساحة الجانبية:

$$S_l = \pi R \times h$$

$$V = \frac{\pi R^2 \times h}{3} \text{ الحجم:}$$

رباعي الأوجه المنتظم
ليكن a طول ضلع رباعي الأوجه المنتظم.

$$S_l = \frac{1}{2} l \times h \text{ المساحة الجانبية:}$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 \text{ الحجم:}$$

تمرين 5: ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا في الفضاء.

لتكن I و J منتصف القطعتين $[BC]$ و $[FG]$ على التوالي.

(1) بين أن $(IJ) \parallel (HFB)$

(2) بين أن $(HFB) \cap (EJ) = (PQ)$

حيث $(HF) \cap (EJ) = \{P\}$

و $(AI) \cap (BD) = \{Q\}$

(3) بين أن $(PQ) \parallel (FB)$

الجواب:1 لدينا I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[FG]$ و

لدينا $(IJ) \parallel (BF)$ و بما أن $(BF) \subset (HFB)$ فإن $(IJ) \parallel (HFB)$ وهذا هو المطلوب.

2) لدينا $(EIJ) \subset (EJ)$ و $(EIJ) \subset (AI)$ لأن $(AE) \parallel (IJ)$ و منه النقطة A, I, E و J نقط استوائية

إذن $P \in (EIJ)$ و $Q \in (EIJ)$ و $P \in (EJ)$ و $Q \in (AI)$ و هذا يعني أن $(PQ) \subset (EIJ)$ (1) من جهة أخرى لدينا $(HF) \subset (HFB)$ و

$(HFD) \subset (BD)$ لأن $(DH) \parallel (BF)$ و منه النقطة H, D, F مستوائية. إذن $P \in (HFD)$ و $Q \in (HFD)$ و هذا يعني أن

$(PQ) \subset (HFD)$ (2) بما أن $(EIJ) \neq (HFD)$ فإن (من (1) و (2)) $(HFD) \cap (EIJ) = (PQ)$

3) لدينا $(IJ) \parallel (BF)$ و $(IJ) \subset (EIJ)$ و $(BF) \subset (HFD)$ و

و $(HFD) \cap (EIJ) = (PQ)$ إذن $(PQ) \parallel (BF)$.

تمرين 6: ليكن $ABCD$ رباعي أوجه و لتكن I منتصف القطعة $[BC]$ و B' مائلة B بالنسبة للنقطة D .

(2) أنشئ شكلا مناسباً.

(3) بين أن $(CB') \parallel (AID)$

(4) حدد تقاطع المستويين (AID) و $(AB'C)$.

الجواب:1

2) لدينا I منتصف القطعة $[BC]$ و B' مائلة B بالنسبة للنقطة D . إذن D منتصف $[BB']$

و منه $(ID) \parallel (B'C)$ و لدينا $(ID) \subset (AID)$

إذن $(CB') \parallel (AID)$

3) لدينا $A \in (AID)$ و $A \in (AB'C)$ و $(AID) \neq (AB'C)$

إذن المستويين (AID) و $(AB'C)$ يتقاطعان في مستقيم يمر من A . و بما أن $(ID) \subset (AID)$ و $(B'C) \subset (AB'C)$.

و أن $(ID) \parallel (B'C)$

فان المستويين (AID) و $(AB'C)$ يتقاطعان في مستقيم يمر من A و يوازي

$(B'C)$ و (ID) .

تمرين 7: ليكن $ABCDEFGH$ مكعباً.

لتكن I, J و K منتصفات القطع $[AB], [EF]$ و $[GH]$ على التوالي.

(1) بين أن النقطة B, C, J و K مستوائية.

(2) بين أن I, B, H و K مستوائية.

(3) بين أن $(KB) \parallel (IH)$.

(4) استنتج أن $(JHC) \parallel (IH)$.

الجواب:

1) في المربع $EFGH$ لدينا I منتصف $[AB]$ و K

منتصف $[GH]$ إذن $(IJ) \parallel (FG)$ و $(EH) \parallel (JK)$

و نعلم أن $(FG) \parallel (BC)$ إذن $(JK) \parallel (BC)$

و منه فان النقطة B, C, J و K مستوائية.

2) لدينا $(EF) \parallel (AB)$ و $(HG) \parallel (EF)$ إذن $(HG) \parallel (AB)$ و منه فان النقطة A, B, G و H مستوائية.

و لدينا $I \in [AB]$ و $K \in [HG]$.

إذن النقطة I, B, H و K مستوائية.

3) $AB = HG$ و I منتصف $[AB]$ و K منتصف $[GH]$ إذن $IB = HK$.

و نعلم أن $(IB) \parallel (HK)$

إذن الرباعي $IBKH$ متوازي أضلاع و منه فان $(IB) \parallel (KH)$

4) لدينا النقطة B, C, I و I مستوائية.

و لدينا $(BK) \subset (JCK)$ و $(IH) \parallel (BK)$

إذن $(IH) \parallel (JCK)$.

تمرين 8: ليكن $ABCD A'B'C'D'$ متوازي مستطيلات.

و لتكن O و O' مركزي المستطيلين $ABCD$ و $A'B'C'D'$ على التوالي.

(1) أنشئ شكلاً مناسباً.

(2) بين أن النقطة A, A', C و C' مستوائية.

بين أن B, B', D و D' مستوائية.

(3) بين أن $(AA'C) \cap (BB'D) = (OO')$

(4) بين أن $(AA') \parallel (BB')$ و $(OO') \parallel (CC') \parallel (DD')$.

الجواب:1

2) في المستطيل $AA'B'B$ لدينا $(AA') \parallel (BB')$ (1)

في المستطيل $BB'C'C$ لدينا $(BB') \parallel (CC')$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $(AA') \parallel (CC')$

و منه فان النقطة A, A', C و C' مستوائية.

و بنفس الطريقة نبين أن: $(BB') \parallel (DD')$ و منه فان النقطة B, B', D و D' مستوائية.

3) لدينا O مركز المستطيل $ABCD$ إذن $O \in (BD)$ و

منه $O \in (BB'D)$ و $O' \in (B'D')$ إذن $O' \in (BB'D)$

إذن $(OO') \subset (BB'D)$ و (α)

لدينا O مركز المستطيل $ABCD$ إذن $O \in (AC)$ و منه $O \in (AA'C)$ و $O' \in (A'C')$ إذن $O' \in (AA'C')$

منه $O' \in (AA'C')$

إذن $(OO') \subset (AA'C')$ و (β)

و لدينا $(AA'C) \neq (BB'D)$ و $(AA') \parallel (BB')$ و $(AA'C) \cap (BB'D) = (OO')$ و منه (α) و (β) نستنتج أن: $(AA'C) \cap (BB'D) = (OO')$ هذا هو المطلوب

4) لدينا $(AA') \parallel (BB')$ و $(AA') \subset (AA'C)$ و $(BB') \subset (BB'D)$ و $(AA'C) \cap (BB'D) = (OO')$ و

إذن $(OO') \parallel (AA') \parallel (BB')$

و بنفس الطريقة:

$(DD') \parallel (CC')$ و $(DD') \subset (BB'D)$ و $(CC') \subset (ACC')$ و

$(ACC') \cap (BB'D) = (OO')$ و

إذن $(OO') \parallel (CC') \parallel (DD')$.

تمرين 9: ليكن $ABCD$ مربعاً و E نقطة من الفضاء حيث:

$(AE) \parallel (ABC)$

النقطة I, J و K منتصفات القطع $[EB], [AB], [DC]$

(1) بين أن $(ADE) \parallel (IJ)$.

بين أن $(ADE) \parallel (IJK)$.

(2) بين أن $(ABE) \parallel (JK)$.

(3) حدد تقاطع المستويين (ABE) و (AIK) .

الجواب:1 لدينا في المثلث ABE

I منتصف $[EB]$ و J منتصف $[AB]$ إذن $(IJ) \parallel (AE)$

و لدينا $(AE) \subset (ADE)$

إذن $(IJ) \parallel (ADE)$ (1)

و منه المطلوب.

لدينا K منتصف $[DC]$

إذن $(JK) \parallel (AD) \parallel (BC)$

و $(AD) \subset (ADE)$ إذن $(JK) \parallel (ADE)$ (2)

إذن (1) و (2) نستنتج أن: $(IJK) \parallel (ADE)$

و منه المطلوب.

(2) لدينا $(AE) \perp (ABC)$

و $(JK) \subset (ABC)$ إذن $(AE) \perp (JK)$

و لدينا $(AD) \parallel (JK)$ و $(AD) \perp (AB)$

إذن $(JK) \parallel (AB)$

و منه فإن (JK) عمودي على مستقيمين متقاطعين هما (AB) و (AE)

ضمن المستوى (ABE)

إذن $(JK) \perp (ABE)$

(3) لدينا $(ABE) \neq (AIK)$ ($E \notin (ABC)$)

لدينا $A \in (ABE)$ و $A \in (AIK)$

و $(EB) \subset (ABE)$ إذن $I \in (ABE)$ (لأن $I \in (EB)$)

لدينا $I \in (AIK)$

و منه $(AIK) \cap (ABE) = (AI)$.

انتهى الدرس