أكاديمية الجهة الشرقية

تمارين محلولة:الحساب المثلثي الجزء الثاني

المستوى : الجذع مشترك علمي و الجذع مشترك تكنولوجي

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1: 1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\cos x = \frac{1}{2}$

2) حل في المجال : $]-\pi,\pi]$ المعادلة : $\cos x = \frac{1}{2}$

الأجوبة: 1) $\cos x = \frac{1}{2}$ يعني $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

وحلول المعادلة هي : $x = \frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{3}+2k\pi$

ومنه : $S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

2)نقوم بالتأطير: أ) $-\pi<\frac{\pi}{3}+2k\pi\le\pi$ يعني $-1<\frac{1}{3}+2k\le1$

يعني $1-\frac{1}{3}<\frac{1}{3}+2k-\frac{1}{3}\le1-\frac{1}{3}$ يعني $-\frac{4}{3}<2k\le\frac{2}{3}$

يعني $-\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\le\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{2}{3}<k\le\frac{1}{3}$ يعني

$-0.66\simeq-\frac{2}{3}<k\le\frac{1}{3}\simeq0.33$ اذن : $k=0$

ومنه :نعوض k ب 0 في $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ فنجد : $x_1=\frac{\pi}{3}+2\times0\times\pi$

أي : $x_1=\frac{\pi}{3}$

ب) نقوم بنفس عملية التأطير: $-\pi<-\frac{\pi}{3}+2k\pi\le\pi$ يعني

$-1<-\frac{1}{3}+2k\le1$ يعني $-1+\frac{1}{3}<-\frac{1}{3}+2k+\frac{1}{3}\le1+\frac{1}{3}$ يعني

$-\frac{2}{3}<2k\le\frac{4}{3}$

يعني $-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\le\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{1}{3}<k\le\frac{2}{3}$ يعني

$-0.33\simeq-\frac{1}{3}<k\le\frac{2}{3}\simeq0.66$ اذن : $k=0$

ومنه :نعوض k ب 0 في $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ فنجد :

$x_1=-\frac{\pi}{3}+2\times0\times\pi$ أي : $x_1=-\frac{\pi}{3}$ وبالتالي : $S=\left\{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$

تمرين2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\cos x=2$

الجواب: لدينا : $a=2>1$ ومنه : فان المعادلة :

$\cos x=2$ ليس لها حلولا في $\mathbb{R}$ أي : $S=\varnothing$

تمرين3: 1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) حل في المجال : $]-\pi,\pi]$ المعادلة : $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

الجواب: 1) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ يعني $\sin x=\sin\frac{\pi}{3}$

وحلول المعادلة هي : $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $x=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

ومنه : $S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

2)نقوم بالتأطير: أ) $-\pi<\frac{\pi}{3}+2k\pi\le\pi$ يعني $-1<\frac{1}{3}+2k\le1$

يعني $1-\frac{1}{3}<\frac{1}{3}+2k-\frac{1}{3}\le1-\frac{1}{3}$ يعني $-\frac{4}{3}<2k\le\frac{2}{3}$

يعني $-\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\le\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{2}{3}<k\le\frac{1}{3}$ يعني

$-0.66\simeq-\frac{2}{3}<k\le\frac{1}{3}\simeq0.33$ اذن : $k=0$

ومنه :نعوض k ب 0 في $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ فنجد : $x_1=\frac{\pi}{3}+2\times0\times\pi$ أي: $x_1=\frac{\pi}{3}$

ب) نقوم بنفس عملية التأطير: $-\pi<\frac{2\pi}{3}+2k\pi\le\pi$ يعني

$-1<\frac{2}{3}+2k\le1$ يعني $-1+\frac{2}{3}<2k\le1+\frac{2}{3}$ يعني $-\frac{1}{3}<2k\le\frac{5}{3}$

يعني $-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\le\frac{5}{3}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{1}{6}<k\le\frac{5}{6}$ اذن : $k=0$

ومنه :نعوض k ب 0 في $\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ فنجد :

$x_1=\frac{2\pi}{3}+2\times0\times\pi$

أي: $x_1=\frac{2\pi}{3}$ وبالتالي : $S=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}$

تمرين4: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\tan x=1$

الجواب:

$\tan x=1$ يعني $\tan x=\tan\frac{\pi}{4}$ يعني $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

ومنه : $S=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

ملخص: من أجل كل عددين حقيقين x و y .

$\cos x=\cos y$ تكافئ أو	$\begin{cases} x=y+2k\pi \\ x=-y+2k\pi \end{cases} k\in\mathbb{Z}$
$\sin x=\sin y$ تكافئ أو	$\begin{cases} x=y+2k\pi \\ x=(\pi-y)+2k\pi \end{cases} k\in\mathbb{Z}$
$\tan x=\tan y$ تكافئ	$x=y+k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

تمرين5: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

الجواب: 1) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ يعني $\cos x=\cos\frac{\pi}{6}$

وحلول المعادلة هي : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

ومنه : $S=\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

تمرين6: 1) حل في $[0,2\pi[$ المعادلة : $\cos x=-\frac{1}{2}$

2) حل في $[0,2\pi[$ المعادلة : $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

الجواب:1) $\cos x = -\frac{1}{2}$ يعني $\cos x = -\cos\frac{\pi}{3}$ يعني

$\cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ لأن: $\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ يعني $\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$ يعني

$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

نقوم بالتأطير: أ) $0 \le \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2\pi$ يعني $0 \le \frac{2}{3} + 2k < 2$

يعني $-\frac{2}{3} \le 2k < 2 - \frac{2}{3}$ يعني $-\frac{1}{3} \le k < \frac{2}{3}$

يعني $-0.33 \simeq -\frac{1}{3} < k \le \frac{2}{3} \simeq 0.66$ اذن : $k = 0$

ومنه: نعوض k ب 0 في $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ فنجد : $x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2\times 0\times\pi$

أي : $x_1 = \frac{2\pi}{3}$

ب) نقوم بنفس عملية التأطير : $0 \le -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2\pi$ يعني

$0 \le -\frac{2}{3} + 2k < 2$ يعني $\frac{2}{3} \le 2k < 2 + \frac{2}{3}$ يعني $\frac{1}{3} \le k < \frac{4}{3}$

يعني $0.33 \simeq \frac{1}{3} < k \le \frac{4}{3} \simeq 1.33$ اذن : $k = 1$

ومنه: نعوض k ب 1 في $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ فنجد :

$x_1 = -\frac{2\pi}{3} + 2\times 1\times\pi$

أي : $x_2 = \frac{4\pi}{3}$ وبالتالي : $S = \left\{\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$

2) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ يعني $\sin x = -\sin\frac{\pi}{4}$ يعني $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

لأن: $\sin(-x) = -\sin x$

$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ يعني $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

نقوم بالتأطير: أ) $0 \le -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi$ يعني $0 \le -\frac{1}{4} + 2k < 2$

يعني $\frac{1}{4} \le 2k < 2 + \frac{1}{4}$ يعني $\frac{1}{8} \le k < \frac{9}{8}$ اذن : $k = 1$

ومنه: نعوض k ب 1 فنجد : $x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\times 1\times\pi$ أي: $x_1 = \frac{7\pi}{4}$

ب) نقوم بنفس عملية التأطير : $0 \le \frac{5\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi$

يعني $0 \le \frac{5}{4} + 2k < 2$ يعني $-\frac{5}{4} \le 2k < 2 - \frac{5}{4}$ يعني $-\frac{5}{8} \le k < \frac{3}{8}$

اذن : $k = 0$ ومنه: نعوض k ب à فنجد : $x_2 = \frac{5\pi}{4}$

وبالتالي : $S = \left\{\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$

ملخص لمعادلات خاصة:

$\cos x = 1$ تكافئ $x = 2k\pi$	
$\cos x = 0$ تكافئ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = -1$ تكافئ $x = (2k+1)\pi$	

$\sin x = 1$ تكافئ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	
$\sin x = 0$ تكافئ $x = k\pi$	$(k \in \mathbb{Z})$
$\sin x = -1$ تكافئ $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos x = -\frac{1}{2}$

تمرين7: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $\cos x = -\frac{1}{2}$

3) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ 4) $\sin x = -\frac{1}{2}$ 5) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$

الجواب:1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ يعني $\cos x = \cos\frac{\pi}{4}$

ومنه : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) $\cos x = -\frac{1}{2}$ يعني $\cos x = -\cos\frac{\pi}{3}$

يعني $\cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ يعني $\cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

ومنه : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

3) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ يعني $\cos^2 x - \frac{1}{2} = 0$

يعني $\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$

يعني $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

يعني $\cos x = \cos\frac{\pi}{4}$ أو $\cos x = \cos\frac{3\pi}{4}$

ومنه : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right\}$

4) $\sin x = -\frac{1}{2}$ يعني $\sin x = -\sin\frac{\pi}{6}$

يعني $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ يعني $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

أو $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

ومنه : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

5) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ يعني $\sin^2 x - \frac{1}{2} = 0$ يعني

$\left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ يعني

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ي

يعني $\sin x = \sin\frac{\pi}{4}$ أو $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

ومنه : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi ; -\frac{\pi}{4}+2k\pi ; \frac{5\pi}{4}+2k\pi ; \frac{3\pi}{4}+2k\pi\right\}$

حيث $k\in\mathbb{Z}$

<u>تمرين8:</u> حل في $]-\pi,\pi]$ معادلة : $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

<u>الجواب:</u> $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ يعني $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{6}$

يعني $2x = -\frac{\pi}{6}+2k'\pi$ أو $2x = \frac{\pi}{6}+2k\pi$

يعني $x = -\frac{\pi}{12}+k'\pi$ أو $x = \frac{\pi}{12}+k\pi$

حيث $k\in\mathbb{Z}$ و $k'\in\mathbb{Z}$

- نقوم أولا بتأطير $x = \frac{\pi}{12}+k\pi$
  - اذا كان $k=-1$ نجد $x_1 = \frac{\pi}{12}-\pi = -\frac{11\pi}{12}$ و هذا العدد ينتمي للمجال $]-\pi,\pi]$
  - اذا كان $k=0$ نجد $x_2 = \frac{\pi}{12}$ و هذا العدد ينتمي للمجال $]-\pi,\pi]$
  - اذا كان $k=1$ نجد $x = \frac{\pi}{12}+\pi = \frac{13\pi}{12}$ و هذا العدد لا ينتمي للمجال $]-\pi,\pi]$
- نقوم بتأطير $x = -\frac{\pi}{12}+k'\pi$
  - اذا كان $k'=-1$ نجد $x = -\frac{\pi}{12}-\pi = -\frac{13\pi}{12}$ و هذا العدد لا ينتمي للمجال $]-\pi,\pi]$
  - اذا كان $k'=0$ نجد $x_3 = -\frac{\pi}{12}$ و هذا العدد ينتمي للمجال $]-\pi,\pi]$
  - اذا كان $k'=1$ نجد $x_4 = -\frac{\pi}{12}+\pi = \frac{11\pi}{12}$ و هذا العدد ل ينتمي للمجال $]-\pi,\pi]$
  - اذا كان $k'=2$ نجد $x = -\frac{\pi}{12}+2\pi = \frac{23\pi}{12}$ و هذا العدد لا ينتمي للمجال $]-\pi,\pi]$

<u>ومنه :</u> $S = \left\{-\frac{11\pi}{12};-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right\}$

<u>تمرين9:</u> (<u>1</u> حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $4\tan x+4=0$

(<u>2</u> حل في $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ المعادلة : $2\sqrt{2}\sin x+2=0$

<u>الجواب:1)</u> المعادلة $4\tan x+4=0$ معرفة يعني

$x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

$4\tan x+4=0$ يعني $\tan x=-1$ يعني

$\tan x = -\tan\frac{\pi}{4}$ يعني $\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

<u>ومنه :</u> $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\right\}$

(<u>2</u> نحل في $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ المعادلة : $2\sqrt{2}\sin x+2=0$

$2\sqrt{2}\sin x+2=0$ يعني $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

يعني $\sin x = -\sin\frac{\pi}{4}$ يعني $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

أو $\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi = \frac{5\pi}{4}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

- نقوم أولا بتأطير $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$-\frac{\pi}{2}\le -\frac{\pi}{4}+2k\pi \le \frac{5\pi}{2}$ يعني $-\frac{1}{2}\le -\frac{1}{4}+2k \le \frac{5}{2}$

يعني $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\le 2k \le \frac{5}{2}+\frac{1}{4}$ يعني $-\frac{1}{8}\le k\le \frac{11}{8}$

يعني $-0,12\le k\le 1,37$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

اذن $k=0$ أو $k=1$

اذا كان $k=0$ نجد $x_1 = -\frac{\pi}{4}+2\times 0\pi = -\frac{\pi}{4}$

اذا كان $k=1$ نجد $x_2 = -\frac{\pi}{4}+2\times 1\pi = \frac{7\pi}{4}$

- نقوم بتأطير $\frac{5\pi}{4}+2k\pi$

$-\frac{\pi}{2}\le \frac{5\pi}{4}+2k\pi \le \frac{5\pi}{2}$ يعني $-\frac{1}{2}\le \frac{5}{4}+2k \le \frac{5}{2}$

يعني $-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\le 2k \le \frac{5}{2}-\frac{5}{4}$ يعني $-\frac{7}{8}\le k\le \frac{5}{8}$

يعني $-0,8\le k\le 0,6$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

اذن $k=0$

اذا كان $k=0$ نجد $x_3 = \frac{5\pi}{4}+2\times 0\pi = \frac{5\pi}{4}$

<u>ومنه :</u> $S = \left\{-\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right\}$

<u>تمرين10:</u> حل في $[0,3\pi]$ معادلة : $\sin x=0$

<u>الجواب:</u> $\sin x=0$ يعني $x=k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

نقوم بالتأطير: $0\le k\pi\le 3\pi$ يعني $0\le k\le 3$

اذن : $k=0$ أو $k=1$ أو $k=2$ أو $k=3$

ومنه:نعوض k بهذه القيم فنجد:

$x_0=0\times\pi$ أو $x_1=1\times\pi$ أو $x_2=2\times\pi$ أو $x_3=3\times\pi$

أي : $x_0=0$ أو $x_1=\pi$ أو $x_2=2\pi$ أو $x_3=3\pi$

وبالتالي : $S=\{0;\pi;2\pi;3\pi\}$

تمرين11:

1)حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\cos 2x=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

2)حل في $[0;\pi]$ المعادلة: $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

3)حل في $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ المعادلة: $\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=1$

الجواب: 1)نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\cos 2x=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$\cos 2x=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

تعني $2x=x-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ **أو** $2x=-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi$

تعني $2x-x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ **أو** $2x+x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

تعني $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ **أو** $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

ومنه $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}/k\in\mathbb{Z}\right\}$

2)نحل في $[0;\pi]$ المعادلة:

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

تعني $2x-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{4}+x+2k\pi$ **أو** $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}-x+2k\pi$

تعني $x=\pi-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2k\pi$ **أو** $3x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2k\pi$

تعني $x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi$ **أو** $x=\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}$

• نقوم أولا بتأطير $\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}$

$0\le\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}\le\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تعني $0\le\frac{7}{36}+\frac{2k}{3}\le1$ تعني $-\frac{7}{24}\le k\le\frac{29}{36}$

تعني $-0,29\le k\le1,2$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

اذن $k=0$ **أو** $k=1$

اذا كان $k=0$ نجد $x_1=\frac{7\pi}{36}$

اذا كان $k=1$ نجد $x_2=\frac{7\pi}{36}+\frac{2\pi}{3}=\frac{31\pi}{36}$

• نقوم بتأطير $x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi$

$0\le\frac{13\pi}{12}+2k\pi\le\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تعني $0\le\frac{13}{12}+2k\le1$ تعني $-\frac{13}{24}\le k\le-\frac{1}{24}$

تعني $-0,54\le k\le-0,04$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

اذن لا توجد قيمة للعدد k حيث $k\in\mathbb{Z}$ و $-0,54\le k\le0,04$

ومنه : $S_{[0.\pi]}=\left\{\frac{7\pi}{36};\frac{31\pi}{36}\right\}$

3)نحل في $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ المعادلة: $\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=1$

المعادلة $\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=1$ معرفة يعني

$2x-\frac{\pi}{5}\ne\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ يعني $2x\ne\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}+k\pi$

يعني $2x\ne\frac{7\pi}{10}+k\pi$ يعني $x\ne\frac{7\pi}{20}+\frac{k\pi}{2}$

اذن : $D=\mathbb{R}-\left\{\frac{7\pi}{20}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$

نعلم أن $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ اذن : $\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

يعني $2x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{4}+k\pi$ يعني $2x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{5}+k\pi$

يعني $2x=\frac{9\pi}{20}+k\pi$ يعني $x=\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}$

• نقوم بتأطير $\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

يعني $-\frac{\pi}{2}\le\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}$ يعني $-\frac{1}{2}\le\frac{9}{40}+\frac{k}{2}\le\frac{1}{2}$

يعني $-\frac{29}{40}\le\frac{k}{2}\le\frac{11}{40}$ يعني $-\frac{29}{20}\le k\le\frac{11}{20}$

يعني $-1,45\le k\le0,55$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

اذن $k=0$ **أو** $k=-1$

اذا كان $k=0$ نجد $x_1=\frac{9\pi}{40}$

اذا كان $k=-1$ نجد $x_2=\frac{9\pi}{40}-\frac{\pi}{2}=-\frac{11\pi}{40}$

ومنه : $S=\left\{-\frac{11\pi}{40};\frac{9\pi}{40}\right\}$

تمرين12: حل في $[-\pi,2\pi[$ المعادلة : $\cos x\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)=0$

ومثل الحلول على الدائرة المثلثية

الجواب: $\cos x\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)=0$ يعني $\cos x=0$ أو $\sqrt{2}\sin x-1=0$

يعني $\cos x=0$ أو $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

يعني $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أو $\sin x=\sin\frac{\pi}{4}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

يعني $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أو $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ أو $x=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

نقوم بالتأطير:أ) $-\pi \le \frac{\pi}{2}+k\pi < 2\pi$ يعني $-1\le \frac{1}{2}+k < 2$

يعني $-1-\frac{1}{2}\le k < 2-\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{3}{2}\le k < \frac{3}{2}$

اذن : $k=0$ أو $k=1$ أو $k=-1$

ومنه:نعوض k بهذه القيم فنجد:

$x_1=\frac{\pi}{2}+0\times\pi$ أو $x_2=\frac{\pi}{2}+1\times\pi$ أو $x_3=\frac{\pi}{2}-1\times\pi$

أي : $x_1=\frac{\pi}{2}$ أو $x_2=\frac{3\pi}{2}$ أو $x_3=-\frac{\pi}{2}$

التأطير:ب) $-\pi\le\frac{\pi}{4}+2k\pi<2\pi$ يعني $-1\le\frac{1}{4}+2k<2$

يعني $-1-\frac{1}{4}\le 2k<2-\frac{1}{4}$ يعني $-\frac{5}{4}\le 2k<\frac{7}{4}$ يعني $-\frac{5}{8}\le k<\frac{7}{8}$

اذن : $k=0$ ومنه:نعوض k ب 0 فنجد : $x_4=\frac{\pi}{4}$

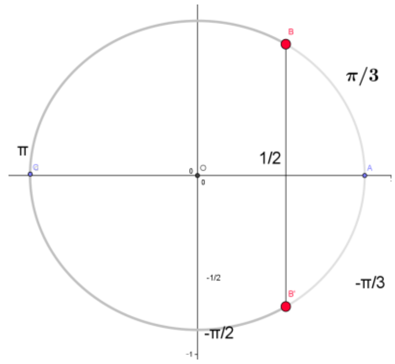
ج) نقوم بعملية التأطير : $-\pi\le\frac{3\pi}{4}+2k\pi<2\pi$

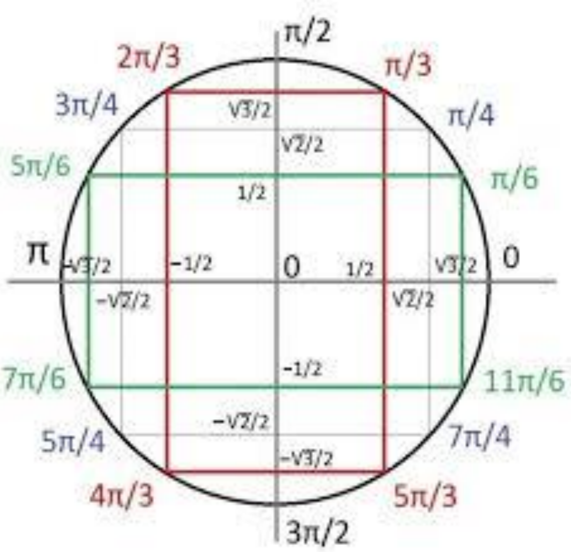
يعني $-1\le\frac{3}{4}+2k<2$ يعني $-1-\frac{3}{4}\le 2k<2-\frac{3}{4}$ يعني $-\frac{7}{8}\le k<\frac{5}{8}$

اذن : $k=0$ ومنه:نعوض k ب 0 فنجد : $x_5=\frac{3\pi}{4}$

وبالتالي : $S=\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$

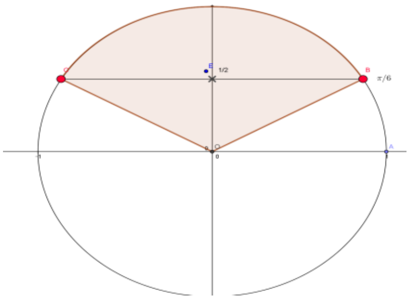
أنظر الدائرة المثلثية:





تمرين13:حل في المجال : $[0,2\pi[$ المتراجحة: $\sin x\ge\frac{1}{2}$

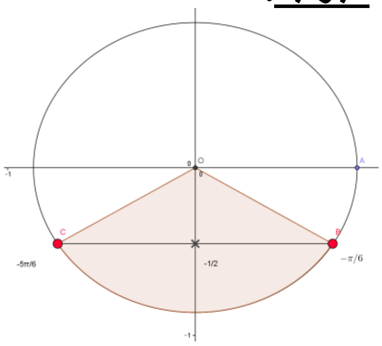
الجواب : $\sin x\ge\frac{1}{2}$ يعني $\sin x\ge\sin\frac{\pi}{6}$



$$S=\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$$

تمرين14: حل في المجال : $]-\pi,\pi]$ المتراجحة: $\sin x\le-\frac{1}{2}$

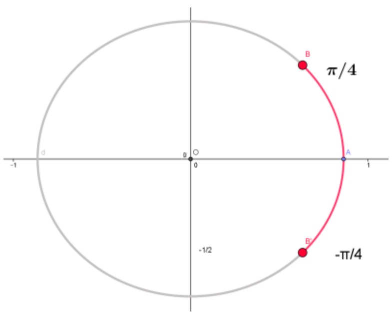
الجواب :



$$S=\left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right]$$

تمرين15:حل في المجال : $]-\pi,\pi]$ المتراجحة: $\cos x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$

الجواب :



$$S=\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$$

تمرين16:حل في المجال : $\left]-\frac{\pi}{2},\pi\right]$ المتراجحة: $\cos x\le\frac{1}{2}$

الجواب :

$$S=\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$$

تمرين17: حل في المجال : $]-\pi,\pi]$ المتراجحات:

1) $\cos x\le 0$

2) $\sin x\ge 0$

الأجوبة: 1) $S=\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

2) $S=[0,\pi]$

تمرين18: حل في المجال: $S=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

المتراجحة: $\tan x\geq 1$

الجواب : $S=\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

تمرين19: حل في المجال $]-\pi,\pi]$ معادلة : $2\sin 2x-1=0$

الجواب: $2\sin 2x-1=0$ يعني $\sin 2x=\frac{1}{2}$ يعني

$\sin 2x=\sin\frac{\pi}{6}$

يعني $2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $2x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

يعني $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ أو $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$ ونقوم بالتأطير

ونجد : $S=\left\{-\frac{11\pi}{12};-\frac{7\pi}{12};\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12}\right\}$

تمرين20: حل في المجال $\mathbb{R}$ معادلة: $(\sin x)^2+\sin x-2=0$

الجواب: نضع: $X=\sin x$ **والمعادلة تصبح :** $X^2+X-2=0$

نحسب المميز : Δ : $a=1$ و $b=1$ و $c=-2$

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times(-2)=9=(3)^2>0$ بما أن $\Delta\succ 0$

فان هذه المعادلة لها حلين هما: $X_1=\frac{-1+3}{2\times1}=1$ **أو** $X_2=\frac{1-3}{2\times1}=-2$

ومنه بالرجوع للمتغير الأصلي نجد :

$\sin x=1$ **أو** $\sin x=-2$

نلاحظ أن المعادلة الثانية ليس لها حل في $]-\pi,\pi]$

نلاحظ أن المعادلة الثانية ليس لها حل في $]-\pi,\pi]$

اذن فقط نحل المعادلة : $\sin x=1$ (معادلة خاصة)

$\sin x=1$ **يعني :** $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ **ومنه :** $S=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

تمرين21: ABC مثلث بحيث : $\hat{A}=\frac{\pi}{4}$ و $\hat{B}=\frac{\pi}{3}$ و

$BC=4cm$

أحسب : $\hat{C}$ و $AC=b$ و AC

أجوبة: 1) حساب $\hat{C}$ لدينا: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi$ يعني

$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+\hat{C}=\pi$

يعني $\frac{4\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}+\hat{C}=\pi$ يعني $\hat{C}=\pi-\frac{7\pi}{12}$ يعني $\hat{C}=\frac{5\pi}{12}$

1) حساب AC

لدينا: $\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{a}{\sin\hat{A}}$ يعني $\frac{b}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{4}{\sin\frac{\pi}{4}}$

يعني $AC\times\sin\frac{\pi}{4}=4\times\sin\frac{\pi}{3}$ يعني $AC=\frac{4\times\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4\times\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{6}$

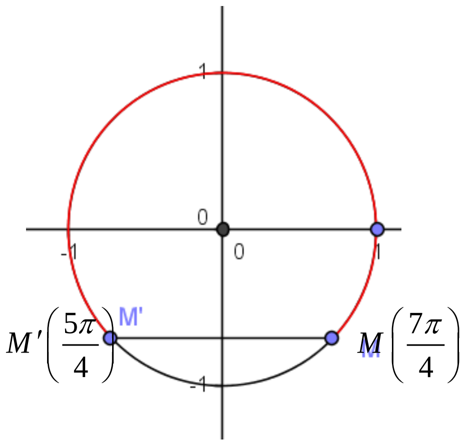
تمرين22: حل في المجال: $[0;2\pi]$

المتراجحة: $\sin x>-\frac{\sqrt{2}}{2}$

الجواب : $\sin x>-\frac{\sqrt{2}}{2}$

نعلم أن : $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x>-\frac{\sqrt{2}}{2}$ يعني $\sin x>\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$



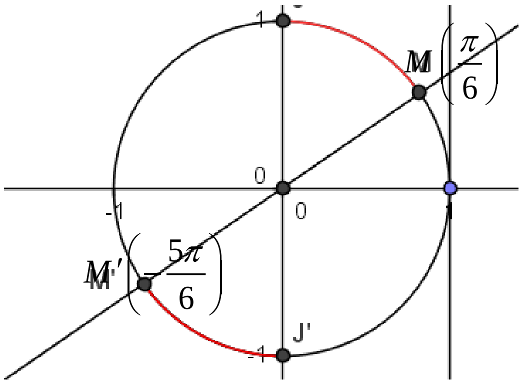
$S=\left[0;\frac{5\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$

تمرين23: حل في المجال: $[-\pi;\pi]$

المتراجحة: $3\tan x-\sqrt{3}\geq 0$

الجواب : نعلم أن : $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$3\tan x-\sqrt{3}\geq 0$ يعني $\tan x\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$



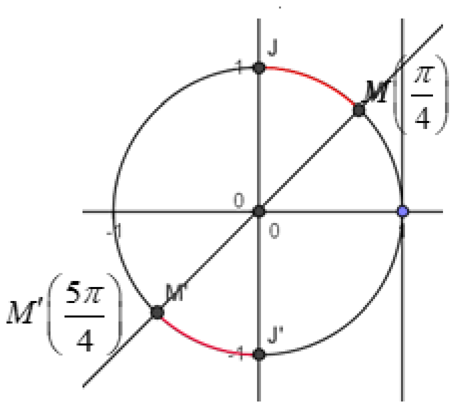
$S=\left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$

تمرين24: حل في المجال: $[0;2\pi]$

المتراجحة: $\tan x-1\geq 0$

الجواب : $\tan x - 1 \geq 0$ يعني $\tan x \geq 1$

نعلم أن : $\tan \dfrac{\pi}{4} = 1$



$$S = \left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{4} ; \frac{3\pi}{2}\right[$$

تمرين25:

1)أ)حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 = 0$ و استنتج الحلول في المجال $[0 ; 2\pi]$

ب)حل في $[0 ; 2\pi]$ المتراجحة $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$

2)حل في $[0 ; \pi]$ المتراجحة $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$

الجواب : نضع $t = \sin x$

$2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$ تعني $2t^2 - 9t - 5$

نستعمل المحددة $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-5)$

اذن : $\Delta = 121$

الجذور هي : $t_1 = \dfrac{9 - \sqrt{121}}{2 \times 2} = -\dfrac{1}{2}$ و $t_2 = \dfrac{9 + \sqrt{121}}{2 \times 2} = 5$

اذن : $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ و $\sin x = 5$

ونعلم أن : $-1 \leq \sin x \leq 1$ **اذن المعادلة** $\sin x = 5$ ليس لها حل

$\sin x = -\dfrac{1}{2}$ تعني $\sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

تعني $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \pi - \left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

تعني $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$

ومنه $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi ; \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

- **نقوم بتأطير** $-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$0 \leq -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$ تعني $0 \leq -\dfrac{1}{6} + 2k \leq 2$

تعني $\dfrac{1}{12} \leq k \leq \dfrac{13}{12}$ تعني $0,08 \leq k \leq 1,02$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

اذن : $k = 1$ ومنه $x_1 = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{11\pi}{6}$

- **نقوم بتأطير** $\dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$0 \leq \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$ تعني $0 \leq \dfrac{7}{6} + 2k \leq 2$

تعني $-\dfrac{7}{12} \leq k \leq \dfrac{5}{12}$ تعني $-0,5 \leq k \leq 0,41$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

اذن : $k = 0$ ومنه $x_2 = \dfrac{7\pi}{6}$

ومنه : $S_{[0;2\pi]} = \left\{\dfrac{11\pi}{6} ; \dfrac{7\pi}{6}\right\}$

ب)نحل في $[0 ; 2\pi]$ المتراجحة $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$

$2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$

تعني $2\left(\sin x + \dfrac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \leq 0$

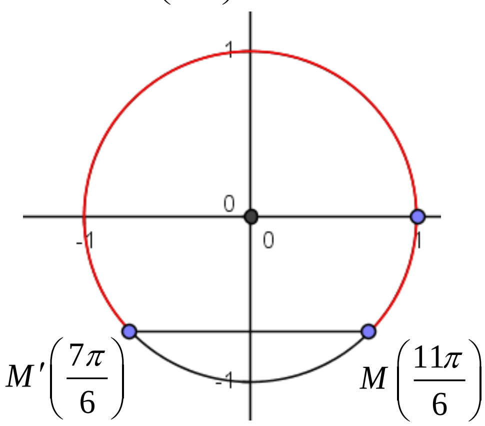
ونعلم أن : $-1 \leq \sin x \leq 1$ **اذن** $-1 \leq \sin x \leq 1 < 5$

اذن : $\sin x - 5 < 0$

وبما أن $\sin x - 5 < 0$ و $2 > 0$

فان : $2\left(\sin x + \dfrac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \leq 0$ تعني $\sin x + \dfrac{1}{2} \geq 0$

تعني $\sin x \geq -\dfrac{1}{2}$ تعني $\sin x \geq \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$



ومنه $S = \left[0 ; \dfrac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{11\pi}{6} ; 2\pi\right]$

2)نحل في $[0 ; \pi]$ المتراجحة $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$

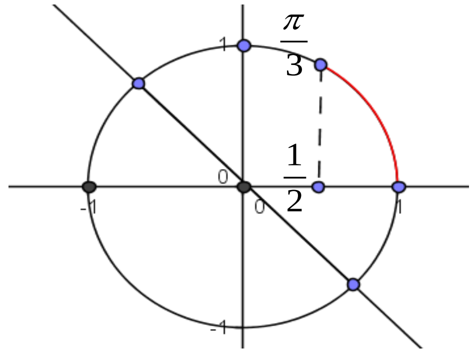
المتراجحة $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$ معرفة يعني

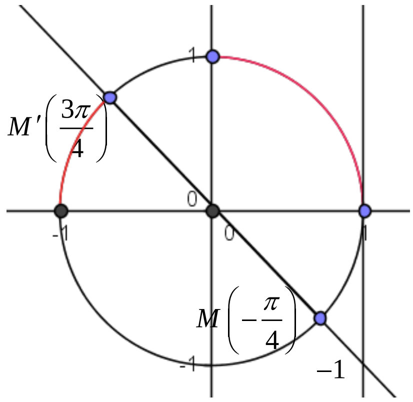
$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

اذن : $D = [0 ; \pi] - \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$

$2\cos x - 1 \ge 0$ تعني $\cos x \ge \dfrac{1}{2}$ تعني $\cos x \ge \cos\dfrac{\pi}{3}$

$\tan x + 1 \ge 0$ تعني $\tan x \ge -1$ تعني $\tan x \ge \tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$





x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$2\cos x-1$		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	
$\tan x+1$		$+$	|	$+$	||	$-$	0	$+$	
$(2\cos x-1)(\tan x+1)$		$+$	|	$-$	||	$+$	0	$-$	

$$S=\left[0;\frac{\pi}{3}\right]\cup\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$$