



الجبر

مذكرة رقم 12 : ملخص لدروس: الدوال العددية مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- عموميات: مجموعة تعريف دالة عددية؛ تساوي دالتين عدديتين؛ التمثيل المبياني لدالة عددية؛ الدالة الزوجية والدالة الفردية (التأويل المبياني)؛ تغيرات دالة عددية؛ القيم الدنيا والقيم القصوى لدالة عددية على مجال؛ التمثيل المبياني وتغيرات الدوال التالية: $x \rightarrow ax^2 + bx + c$ ، $x \rightarrow \frac{a}{x}$ ، $x \rightarrow ax^2$ $x \rightarrow \cos(x)$ ، $x \rightarrow \sin(x)$ ، $x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$	- التعرف على المتغير ومجموعة تعريفه بالنسبة لدالة معرفة بجداول معطيات أو بمنحنى أو بصيغة. - قراءة صورة عدد وتحديد عدد صورته معلومة من خلال التمثيل المبياني لدالة. - استنتاج تغيرات دالة أو القيم القصوى والدنيا انطلاقا من التمثيل المبياني. - استعمال التمثيل المبياني لدراسة بعض المعادلات والمترجمات. - التمكن من رسم منحنى دالة حدودية من الدرجة الثانية أو دالة متخاطة دون اللجوء إلى تغيير المعلم. - التعبير عن وضعيات مستقاة من الواقع أو من مواد أخرى باستعمال مفهوم الدالة.	- لتقريب مفهوم الدالة والتمثيل المبياني لها يمكن الاستئناس في حدود الإمكان ببعض البرامج المعلوماتية المدمجة في الحاسوب التي تمكن من إنشاء منحنيات الدوال كما يمكن الانطلاق من وضعيات مختارة من الهندسة والفيزياء والاقتصاد والحياة العامة. - ينبغي تدريب التلاميذ على تربيض الوضعيات وحل مسائل متنوعة أثناء تناول القيم الدنيا والقيم القصوى لدالة. - تعتبر جميع الدوال الواردة في هذا الفصل إلى جانب دالة الجيب وجيب التمام دوالا مرجعية. - يمكن استعمال الآلة الحاسبة العلمية في تحديد الصور أو الآلة الحاسبة القابلة للبرمجة لإنشاء المنحنيات إن كان ذلك ممكنا (أو الإشارة إلى ذلك). - يمكن اقتراح مسائل تؤدي إلى معادلات يصعب حلها جبريا وتحديد حلول مقربة لها ، مبيانيا.

ملحوظة: نقول إن f دالة عددية معرفة على A إذا كان A جزءا من D_f .

أنشطة : حدد مجموعة تعريف الدوال التالية:

$$g(x) = \frac{x^3}{2x-4} \quad (2) \quad f(x) = 3x^2 - x + 1 \quad (1)$$

$$m(x) = \sqrt{2x-4} \quad (4) \quad h(x) = \frac{5x+10}{x^2-9} \quad (3)$$

الجواب: (1) $f(x) = 3x^2 - x + 1$ يعني $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 2x-4 \neq 0\} \text{ يعني } g(x) = \frac{x^3}{2x-4} \quad (2)$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{2\} \text{ ومنه } x=2 \text{ يعني } 2x=4 \text{ يعني } 2x-4=0$$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} / x^2-9 \neq 0\} \text{ يعني } h(x) = \frac{5x+10}{x^2-9} \quad (3)$$

$$x^2-9=0 \text{ يعني } x^2-3^2=0 \text{ يعني } (x-3)(x+3)=0$$

$$\text{يعني } x+3=0 \text{ أو } x-3=0 \text{ يعني } x=-3 \text{ أو } x=3$$

$$\text{ومنه } D_h = \mathbb{R} - \{-3; 3\}$$

$$D_m = \{x \in \mathbb{R} / 2x-4 \geq 0\} \text{ يعني } m(x) = \sqrt{2x-4} \quad (4)$$

$$2x-4 \geq 0 \text{ يعني } 2x \geq 4 \text{ يعني } x \geq \frac{4}{2} \text{ يعني } x \geq 2 \text{ ومنه } D_m = [2; +\infty[$$

تمرين 1: حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات التالية:

$$f(x) = \frac{x^2+x-1}{4x-12} \quad (2) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 10 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{x^3-2x} \quad (4) \quad f(x) = \frac{x+10}{4x^2-1} \quad (3)$$

$$f(x) = \sqrt{-3x+6} \quad (6) \quad f(x) = \frac{x-5}{2x^2-5x-3} \quad (5)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{-3x+2}{x-1}} \quad (8) \quad f(x) = \sqrt{x^2-3x+2} \quad (7)$$

الجواب: (1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 10$

يعني $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4x-12 \neq 0\} \text{ يعني } f(x) = \frac{x^2+x-1}{4x-12} \quad (2)$$

1. عموميات حول الدوال العددية:

1. دالة عددية لمتغير حقيقي:

تعريف: ليكن D جزءا من $\mathbb{R}$. نسمي f دالة عددية معرفة على D

(أو f دالة من D نحو $\mathbb{R}$)، كل علاقة تربط كل عنصر x من

D بعنصر وحيد من $\mathbb{R}$ ، يرمز له بالرمز $f(x)$.

اصطلاحات: لتكن f دالة عددية معرفة على D نكتب: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x)$$

■ المجموعة D تسمى مجموعة تعريف الدالة f .

■ ليكن x عنصرا من D ، بحيث: $y = f(x)$

← y يسمى صورة x بالدالة f .

← العنصر x يسمى سابق العنصر y .

■ الدالة f تسمى كذلك دالة عددية لمتغير حقيقي.

مثال 1: $f =$ عدد ساعات الدراسة

$$A = \{\text{الأحد؛؛ الاثنين}\} \quad B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$

(الأحد) f غير معرفة

مثال 2: ليكن f الدالة العددية المعرفة كالتالي: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x) = 3x^2 - 1$$

$$1. \text{ أحسب: } f(1) \text{ و } f(-1) \text{ و } f(\sqrt{2})$$

2. حدد سوابق العدد 2

$$\text{الجواب: (1) } f(1) = 3 \times 1^2 - 1 = 3 - 1 = 2 \text{ و } f(-1) = 3 \times (-1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$f(\sqrt{2}) = 3 \times (\sqrt{2})^2 - 1 = 6 - 1 = 5$$

$$f(x) = 3 \times x^2 - 1 = 2 \text{ يعني } 3 \times x^2 - 1 = 2 \text{ يعني } 3 \times x^2 = 3$$

$$\text{يعني } x^2 = 1 \text{ يعني } x = 1 \text{ أو } x = -1 \text{ ومنه للعدد سابقين هما } x = 1 \text{ أو } x = -1$$

2. مجموعة تعريف دالة عددية:

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x . مجموعة تعريف الدالة f هي

المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية x بحيث $f(x)$ موجود

ي $f(x)$ قابلة للحساب. ويرمز لها غالبا بالرمز D_f بمعنى: $x \in D_f$

تكافئ $f(x) \in \mathbb{R}$.

تكون الدالتان f و g متساويتان إذا وفقط إذا كان $f(x) = g(x)$

لكل x من D . ونكتب: $f = g$

مثال: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين بما

$$f(x) = \sqrt{x^2} \text{ و } g(x) = |x|$$

لدينا: $D_f = \mathbb{R}$, لأن $x^2 \geq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$, و $D_g = \mathbb{R}$ و منه

$$D_f = D_g$$

و بما أن $\sqrt{x^2} = |x|$ لكل x من $\mathbb{R}$ فإن $f(x) = g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

إذن $f = g$.

4. التمثيل المبياني لدالة عددية:

المستوى المنسوب إلى معلم $(\vec{i}; \vec{j}; 0)$ غالبا يكون متعامدا ممتظما.

تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على جزء D من $\mathbb{R}$.

التمثيل المبياني C_f للدالة f (أو منحنى الدالة f) هو مجموعة

النقط $M(x; y)$ من المستوى بحيث: $y = f(x)$ و $x \in D$

مثال 1: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي:

$$f(x) = \frac{2x}{x+2} \text{ (المنحنى } (C_f) \text{)}$$

الممثل للدالة f و ليكن A و B نقط أفصليها هي -1 و 2 على التوالي

(1) حدد أرتيب A و B علما أنهما ينتميان إلى (C_f) .

(2) لتكن $E\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{5}\right)$, $F(-3; 5)$, $G(1; 0)$ نقط من المستوى. هل

النقط E , F و G تنتمي للمنحنى (C_f) ؟

(الجواب: 1) $A \in (C_f)$ يعني $A(-1; f(-1))$

$$A(-1; -2) \text{ و منه } f(-1) = \frac{2 \times (-1)}{-1+2} = -2$$

$$B(2; 1) \text{ و منه } f(2) = \frac{2 \times 2}{2+2} = 1 \text{ يعني } B \in (C_f)$$

$$E\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{5}\right) \in (C_f) \text{ و منه } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \times \left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)+2} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5} \text{ لدينا } E\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{5}\right) \in (C_f)$$

$$F(-3; 5) \notin (C_f) \text{ و منه } f(-3) = \frac{2 \times (-3)}{(-3)+2} = 6 \neq 5 \text{ لدينا } F(-3; 5) \notin (C_f)$$

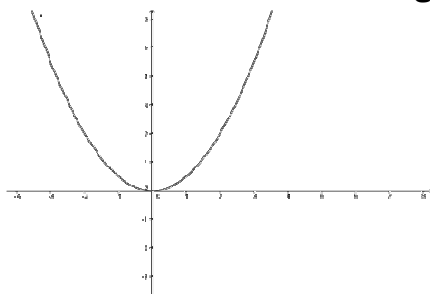
$$G(1; 0) \notin (C_f) \text{ و منه } f(1) = \frac{2 \times 1}{1+2} = \frac{2}{3} \neq 0 \text{ لدينا } G(1; 0) \notin (C_f)$$

مثال 2: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي:

$$f(x) = x^2$$

أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المعلم $(\vec{i}; \vec{j}; 0)$ ماذا تلاحظ

بالنسبة لمنحنى الدالة؟



نلاحظ من خلال الحساب أن: التمثيل المبياني متمثل بالنسبة لمحور الأرتيب وأن عديدين متقابلين لهما نفس الصورة

$$D_f = \mathbb{R} - \{3\} \text{ و منه } x = 3 \text{ يعني } 4x - 12 = 0$$

$$f(x) = \frac{x+10}{4x^2-1} \text{ يعني } D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4x^2 - 1 \neq 0\}$$

$$4x^2 - 1 = 0 \text{ يعني } (2x-1)(2x+1) = 0 \text{ يعني } 2x-1=0 \text{ أو } 2x+1=0$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\} \text{ و منه } x = -\frac{1}{2} \text{ أو } x = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{x^3-2x} \text{ يعني } D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^3 - 2x \neq 0\}$$

$$x^3 - 2x = 0 \text{ يعني } x(x^2 - 2) = 0 \text{ يعني } x^2 - 2 = 0 \text{ أو } x = 0$$

$$x^2 = 2 \text{ يعني } x = \sqrt{2} \text{ أو } x = -\sqrt{2} \text{ أو } x = 0$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$$

$$f(x) = \frac{x-5}{2x^2-5x-3} \text{ يعني } D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 5x - 3 \neq 0\}$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \text{ نحل المعادلة باستعمال المميز}$$

$$a = 2 \text{ و } b = -5 \text{ و } c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 = (7)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ و } x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{5-7}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}; 3\right\} \text{ و منه:}$$

$$f(x) = \sqrt{-3x+6} \text{ يعني } D_f = \{x \in \mathbb{R} / -3x+6 \geq 0\}$$

$$-3x+6 \geq 0 \text{ يعني } -3x \geq -6 \text{ يعني } x \leq \frac{-6}{-3} = 2 \text{ و منه } D_m =]-\infty; 2]$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \text{ يعني } D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 \geq 0\}$$

$$a = 1 \text{ و } b = -3 \text{ و } c = 2 \text{ و منه } \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن للحدودية جذرين هما:

x	$-\infty$	$1/2$	1	$+\infty$	
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$x_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \text{ و } x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{3+1}{4} = 1$$

$$D_f = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty[\text{ و منه:}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{-3x+2}{x+1}} \text{ يعني } D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{-3x+2}{x+1} \geq 0 \text{ و } x+1 \neq 0\right\}$$

$$-3x+2 = 0 \text{ يعني } x = \frac{2}{3} \text{ و } x+1 = 0 \text{ يعني } x = -1$$

نحدد أولا جدول الاشارة:

x	$-\infty$	-1	$1/3$	$+\infty$
$-3x+2$	$+$	$ $	$+$	$0 \quad -$
$x+1$	$+$	0	$-$	$ \quad -$
$-3x+2/x+1$	$-$	$\parallel$	$+$	$0 \quad -$

$$D_f = \left]-1; \frac{2}{3}\right]$$

3. تساوي دالتين عدديتين:

تعريف: لتكن f و g دالتين عدديتين لهما نفس مجموعة تعريف D .

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	9	4	1	0	1	4	9

5. الدالة الزوجية- الدالة الفردية:

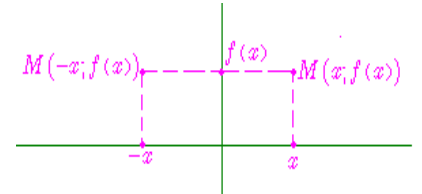
أ) الدالة الزوجية:

تعريف: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها.

نقول إن f دالة زوجية إذا تحقق الشرطان التاليان:

❖ لكل x من D_f لدينا: $-x$ تنتمي إلى D_f .

❖ لكل x من D_f لدينا: $f(-x) = f(x)$.



مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f

2. بين أن f دالة زوجية

3. أرسم التمثيل المبياني للدالة f

4. اعط تأويلا مبيانيا

أجوبة: (1) $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

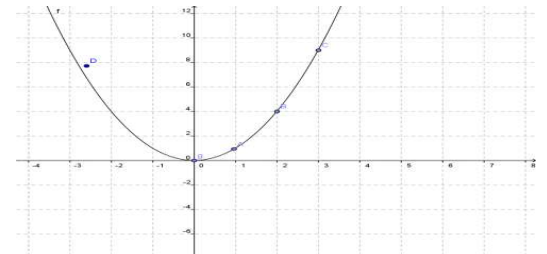
(2) أ) لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$.

$$f(-x) = \frac{1}{2}(-x)^2 = \frac{1}{2}x^2 = f(x) \text{ (ب)}$$

ومنه f دالة زوجية

(3)

x	0	1	2	3
f(x)	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$



(4) محور الأرتيب محور تماثل المنحنى C_f .

ب) **الدالة الفردية:** لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و C_f منحناها

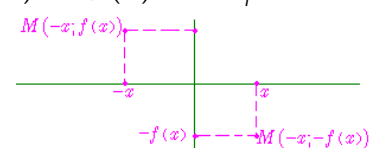
في معلم متعامد ممنظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

تعريف: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها

نقول أن f دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان:

❖ لكل x من D_f لدينا: $-x$ تنتمي إلى D_f .

❖ لكل x من D_f لدينا: $f(-x) = -f(x)$.



مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي:

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f

2. بين أن f دالة فردية

3. أرسم التمثيل المبياني للدالة f

4. اعط تأويلا مبيانيا

أجوبة: (1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$

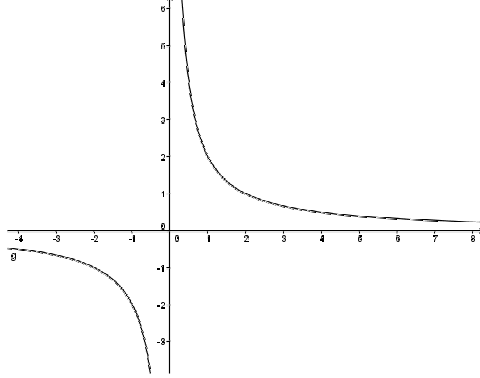
ومنه: $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

(2) أ) لكل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}^*$.

$$f(-x) = \frac{2}{(-x)} = -\frac{2}{x} = -f(x) \text{ (ب)}$$

ومنه f دالة فردية (3)

x	0	1	2	3
f(x)		2	1	$\frac{2}{3}$



(4) نقطة 0 مركز تماثل المنحنى C_f .

ت) التأويل المبياني

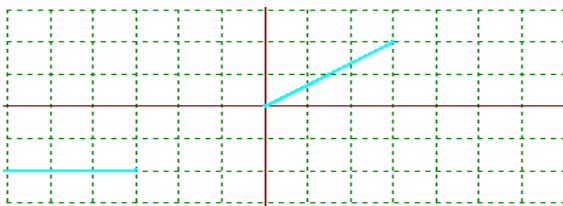
لتكن f دالة عددية لمتغير x حقيقي و C_f منحناها في معلم متعامد

ممنظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

❖ تكون f دالة زوجية إذا و فقط إذا كان محور الأرتيب محور تماثل المنحنى C_f .

❖ تكون f دالة فردية إذا و فقط إذا كانت النقطة 0 مركز تماثل المنحنى C_f .

مثال : أتمم إنشاء منحنى الدالة الزوجية f المعرفة على $\mathbb{R}$



II. تغيرات دالة عددية:

مثال 1: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي:

$$f(x) = 2x + 1$$

املا الجدول التالي : ماذا تلاحظ؟

-100	-10	-7	-3	0	2	5	10	100

نلاحظ : أنه عندما تكبر x فإن $f(x)$ تكبر أيضا نقول أن الدالة

f تزايدية

مثال 2: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي:

$$f(x) = -3x + 2$$

املاً الجدول التالي : ماذا تلاحظ؟

-100	-10	-7	-3	0	2	5	10	100

نلاحظ : أنه عندما تكبر x فإن $f(x)$ تصغر نقول أن الدالة

f تناقصية

1. **تعريف:** لنكن f دالة عددية معرفة على المجال I .
❖ نقول إن الدالة f تزايدية (تناقصية) على المجال I , إذا و فقط إذا كان لكل

إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$)

مثال 1: $f(x) = 4x - 3$

أجوبة: (1) $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(2) ليكن: $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن: $4x_1 < 4x_2$ اذن: $4x_1 - 3 < 4x_2 - 3$ اذن: $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}$

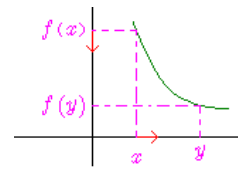
مثال 2: $f(x) = -3x + 2$

أجوبة: (1) $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

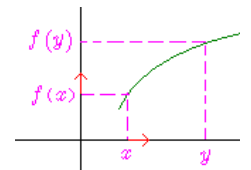
(2) ليكن: $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن: $-3x_1 > -3x_2$ اذن: $-3x_1 + 2 > -3x_2 + 2$ اذن: $f(x_1) > f(x_2)$

ومنه الدالة f تناقصية على $\mathbb{R}$



f تناقصية



f تزايدية

❖ نقول إن الدالة f ثابتة على المجال I , إذا و فقط إذا كان

لكل x_1 و x_2 من I لدينا: $f(x_1) = f(x_2)$

مثال : اعط مثال لدالة ثابتة

2. **جدول تغيرات دالة:** لنكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f

مجموعة تعريفها. دراسة منحنى تغيرات الدالة f , يعني تجزيء المجموعة D_f إلى أكبر مجالات ممكنة تكون فيها الدالة f تزايدية أو تناقصية قطعاً أو ثابتة. و نلخص نتائج هذه الدراسة في جدول, يسمى جدول تغيرات الدالة ثابتة.

3. **رتابة دالة على مجال:**

تعريف: لنكن دالة عددية معرفة على مجال I .

نقول إن f رتبية قطعاً على المجال I إذا كانت تزايدية قطعاً على I أو تناقصية قطعاً على I .

تمرين 2: لنكن f دالة معرفة ب: $f(x) = \frac{2}{x+1}$

(1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

(2) أدرس رتابة الدالة f على كل من المجالين $]-1; +\infty[$ و $]-\infty; -1[$.

(3) حدد جدول تغيرات الدالة f .

أجوبة: (1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \neq 0\}$

$x+1=0$ يعني $x=-1$ ومنه: $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

(2) أ) دراسة رتابة الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$.

ليكن: $x_1 \in]-1; +\infty[$ و $x_2 \in]-1; +\infty[$ بحيث $x_1 < x_2$
اذن $x_1 + 1 < x_2 + 1$ ومنه $\frac{1}{x_1 + 1} > \frac{1}{x_2 + 1}$ ومنه $\frac{2}{x_1 + 1} > \frac{2}{x_2 + 1}$

أي $f(x_1) > f(x_2)$

ومنه الدالة f تناقصية على $]-1; +\infty[$

(ب) دراسة رتابة الدالة f على المجال $]-\infty; -1[$

ليكن: $x_1 \in]-\infty; -1[$ و $x_2 \in]-\infty; -1[$ بحيث $x_1 < x_2$
اذن $x_1 + 1 < x_2 + 1$ ومنه $\frac{1}{x_1 + 1} > \frac{1}{x_2 + 1}$ ومنه $\frac{2}{x_1 + 1} > \frac{2}{x_2 + 1}$

أي $f(x_1) > f(x_2)$ ومنه الدالة f تناقصية على $]-\infty; -1[$

(3) جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$			

III. دراسة الدوال:

1. **الدالة:** $x \mapsto ax^2$ ($a \neq 0$)

ملخص الحالة: $a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		0	

الحالة: $a < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		0	

ملاحظات: المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto ax^2$ ($a \neq 0$) يسمى شلجماً.

النقطة أصل المعلم تسمى رأس الشلج. محور الأرتيب هو محور تماثل للمنحنى.

مثال: لنكن f دالة معرفة ب: $f(x) = \frac{3}{2}x^2$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2. أدرس زوجية الدالة f

3. أدرس رتابة الدالة f على كل من المجالين $[0; +\infty[$ و $]-\infty; 0]$

4. حدد جدول تغيرات الدالة f .

5. هل الدالة f تقبل قيمة دنيا أو قيمة قصوى؟

6. أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم م $(o; i; j)$.

أجوبة: (1) $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(2) أ) لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$.

(ب) $f(-x) = \frac{3}{2}(-x)^2 = \frac{3}{2}x^2 = f(x)$

ومنه f دالة زوجية

(3) أ) دراسة رتابة الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.

ليكن: $x_1 \in [0; +\infty[$ و $x_2 \in [0; +\infty[$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن: $x_1^2 < x_2^2$ ومنه $\frac{3}{2}x_1^2 < \frac{3}{2}x_2^2$ أي $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $[0; +\infty[$

$$f(x) = \frac{7}{2}x^2 \quad (3) \quad f(x) = 5x^2 \quad (2) \quad f(x) = -3x^2 \quad (1)$$

أجوبة: (1) $f(x) = -3x^2$ إذن $a = -3 < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		0	

(2) $f(x) = 5x^2$ إذن $a = 5 > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		0	

(3) $f(x) = \frac{7}{2}x^2$ إذن $a = \frac{7}{2} > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		0	

2. الدالة: $f(x) = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$)

مثال: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = \frac{-2}{x}$

- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
- أدرس زوجية الدالة f .
- أدرس رتبة الدالة f على كل من المجالين $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$.
- حدد جدول تغيرات الدالة f .
- هل الدالة f تقبل قيمة دنيا أو قيمة قصوى؟
- أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم

أجوبة: (1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$

ومنه: $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

(2) أ) لكل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}^*$.
ب) $f(-x) = \frac{-2}{(-x)} = -\frac{-2}{x} = -f(x)$ ومنه f دالة فردية

(3) أ) دراسة رتبة الدالة f على المجال $]0; +\infty[$:

ليكن: $x_1 \in]0; +\infty[$ و $x_2 \in]0; +\infty[$ بحيث $x_1 < x_2$

ان: $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ ومنه $\frac{-2}{x_1} < \frac{-2}{x_2}$ أي $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $]0; +\infty[$

ب) دراسة رتبة الدالة f على المجال $]-\infty; 0[$

ليكن: $x_1 \in]-\infty; 0[$ و $x_2 \in]-\infty; 0[$ بحيث $x_1 < x_2$

ان: $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ ومنه $\frac{-2}{x_1} < \frac{-2}{x_2}$ أي $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $]-\infty; 0[$

(4)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

(5) الدالة f تقبل لا تقبل لا قيمة قصوى ولا قيمة دنيا

ب) دراسة رتبة الدالة f على المجال $]-\infty; 0[$:

ليكن: $x_1 \in]-\infty; 0[$ و $x_2 \in]-\infty; 0[$ بحيث $x_1 < x_2$

ان: $x_1^2 > x_2^2$ ومنه $\frac{3}{2}x_1^2 > \frac{3}{2}x_2^2$ أي $f(x_1) > f(x_2)$

ومنه الدالة f تناقصية على $]-\infty; 0[$

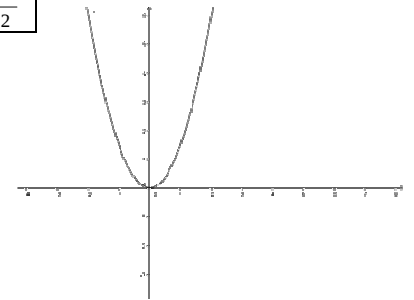
(4) حدد جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		0	

(5) الدالة f تقبل قيمة دنيا عند: $x = 0$

(6) رسم التمثيل المبياني للدالة f

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	$\frac{3}{2}$	6	$\frac{27}{2}$



تمرين 3: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$

- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
- أدرس زوجية الدالة f .
- أدرس رتبة الدالة f على كل من المجالين $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$.
- حدد جدول تغيرات الدالة f .
- هل الدالة f تقبل قيمة دنيا أو قيمة قصوى؟
- أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(\alpha; \bar{j})$.

أجوبة: (1) $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(2) أ) لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$.

ب) $f(-x) = -\frac{1}{4}(-x)^2 = -\frac{1}{4}x^2 = f(x)$ ومنه f دالة زوجية

(3) أ) دراسة رتبة الدالة f على المجال $]0; +\infty[$:

ليكن: $x_1 \in]0; +\infty[$ و $x_2 \in]0; +\infty[$ بحيث $x_1 < x_2$

ان: $x_1^2 < x_2^2$ ومنه $-\frac{1}{4}x_1^2 > -\frac{1}{4}x_2^2$ أي $f(x_1) > f(x_2)$

ومنه الدالة f تناقصية على $]0; +\infty[$

ب) دراسة رتبة الدالة f على المجال $]-\infty; 0[$:

ليكن: $x_1 \in]-\infty; 0[$ و $x_2 \in]-\infty; 0[$ بحيث $x_1 < x_2$

ان: $x_1^2 > x_2^2$ ومنه $-\frac{1}{4}x_1^2 < -\frac{1}{4}x_2^2$ أي $f(x_1) < f(x_2)$

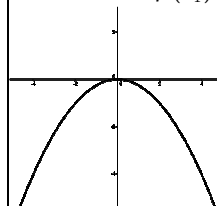
ومنه الدالة f تزايدية على $]-\infty; 0[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		0	

(4) الدالة f تقبل قيمة قصوى عند: $x = 0$

(5) التمثيل المبياني للدالة f هو شلجم رأسه النقطة O

تمرين 4: حدد جدول تغيرات الدالة في الحالات التالية:



مثال: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$.

(1) حدد D_f

(2) بين أن: $f(x) = -2(x-1)^2 + 1$

(3) (يسمى الشكل القانوني $f(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta$)

(4) حدد جدول تغيرات الدالة f .

(5) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل.

و مع محور الأرتيب.

(6) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

أجوبة: (1) $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$$f(x) = -2x^2 + 4x - 1 = -2(x^2 - 2x) - 1 = -2(x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2 - 1^2) - 1$$

$$f(x) = -2((x-1)^2 - 1) - 1 = -2(x-1)^2 + 2 - 1 = -2(x-1)^2 + 1$$

بالمقارنة مع كتابة الشكل القانوني: $f(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta$

نجد : $\alpha = -1; \beta = 1; a = -2$

(4) حدد جدول تغيرات الدالة f . لدينا : $a < 0$ إذن :

x	$-\infty$		$+\infty$
		1	
$f(x)$			

(5) (نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x) = 0$ يعني $-2(x-1)^2 + 1 = 0$

$$(x-1)^2 = \frac{1}{2} \text{ يعني } -2(x-1)^2 = -1$$

$$\text{يعني } x-1 = -\sqrt{\frac{1}{2}} \text{ أو } x-1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\text{يعني } x = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{-\sqrt{2}+2}{2} \text{ أو } x = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$$

ومنه نقط التقاطع هما: $A\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}; 0\right)$ أو $B\left(\frac{-\sqrt{2}+2}{2}; 0\right)$

ملاحظة: يمكن حل المعادلة باستعمال المميز

(ب) (نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتيب

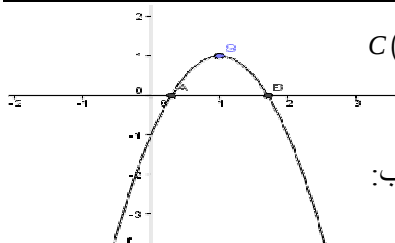
-2	-1	0	1	2	3	4
-17	-7	-1	1	-1	-7	-17

نحسب فقط : $f(0)$

$$f(0) = -2 \times 0^2 + 4 \times 0 - 1 = -1$$

ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0; -1)$

(6) رسم C_f



تمرين 6: لتكن f دالة معرفة ب:

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

(1) بين أن: $f(x) = (x+2)^2 - 1$ (يسمى الشكل القانوني

$$f(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta$$

(2) حدد جدول تغيرات الدالة f .

(3) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محوري المعلم

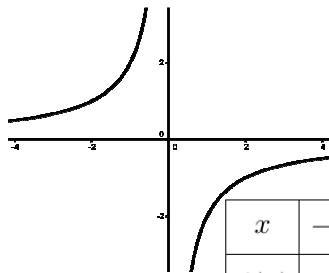
(4) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f والمستقيم (D)

الذي معادلته $y = 3$: (D) في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(5) حدد نقط تقاطع (C_f) و (D)

(6) حل مبيانيا في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x^2 + 4x \geq 0$.

(6) التمثيل المبياني للدالة f هو هذلول مركزه النقطة O



x	0	1	2	4
$f(x)$		-2	-1	1/2

(3) ملخص: الحالة: $a > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$					

الحالة: $a < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$					

التمثيل المبياني للدالة f : بما أن f دالة فردية فانه يكفي أن نمثل

f على $]0, +\infty[$ ثم نتم منحنى الدالة f على باستعمال التماثل

المركزي الذي مركزه O أصل المعلم.

تعريف: منحنى الدالة $x \mapsto \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) يسمى هذلول مركزه O أصل

المعلم و مستقيماه المقاربان هما $x = 0$ و $y = 0$.

تمرين 5: حدد جدول تغيرات الدالة في الحالات التالية :

$$f(x) = \frac{3}{x} \quad (2) \quad f(x) = \frac{-4}{x} \quad (1)$$

أجوبة: (1) $f(x) = \frac{-4}{x}$: $a = -4 < 0$ إذن :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$					

(2) $f(x) = \frac{3}{x}$: $a = 3 > 0$ إذن :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$					

IV. التمثيل المبياني و تغيرات الدالة: $x \mapsto ax^2 + bx + c$

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = ax^2 + bx + c$

حيث a و b و c أعداد حقيقية مع $a \neq 0$.

❖ يوجد عدنان حقيقيان α و β بحيث: $f(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta$

(الشكل القانوني)

❖ منحنى الدالة f يسمى شلجما رأسه $S(-\alpha; \beta)$ و محور $x = -\alpha$: (D)

نقبل النتائج التالية: جدول تغيرات f :

الحالة: $a > 0$

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
f			β		

الحالة: $a < 0$

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
f			β		

المستوى المنسوب إلى معلم متعاقد ممنظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

حيث $c \neq 0$ و a و b و c و d أعداد حقيقية و $ad-bc \neq 0$ و $x \neq -\frac{d}{c}$

نقبل النتائج التالية: يوجد ثلاث أعداد: α و β و k بحيث:

$$f(x) = \beta + \frac{k}{x+\alpha}$$

❖ جدول تغيرات f : الحالة: $k > 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
f			

الحالة: $k < 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
f			

❖ منحنى f يسمى هذلولاً مركزه $S(-\alpha; \beta)$ و مقاربه

$$(D_2): y = \beta \text{ و } (D_1): x = -\alpha$$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

(1) حدد D_f

(2) أكتب $f(x)$ على الشكل المختصر وحدد مقاربات منحنى الدالة f

(3) حدد جدول تغيرات الدالة f

(4) حدد نقط تقاطع منحنى الدالة f مع محوري المعلم

(5) أرسم (C_f) التمثيل المبياني للدالة

(6) أرسم المستقيم الذي معادلته: الذي معادلته: $y = 5$

(7) حل مبيانيا ثم جبريا المعادلة $f(x) = 5$

(8) حل مبيانيا المتراحة: $f(x) \geq 5$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \text{ أجوبة:}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0\}$$

$$\text{ومنه } D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

(2) إنجاز القسمة الإقليدية:

$$\begin{array}{r|l} 2x+1 & x-1 \\ -2x+2 & \\ \hline & 3 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$$

بالمقارنة مع كتابة الشكل القانوني: $f(x) = \beta + \frac{k}{x+\alpha}$

نجد: $\alpha = -1; \beta = 2; k = 3$

(3) حدد جدول تغيرات الدالة f . لدينا $k = 3 > 0$ إذن:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$			

منحنى f هو هذلولاً مركزه $A(1; 2)$ و مقاربه $y = 2$ و $x = 1$

$$f(x) = x^2 + 4x + 3 \text{ أجوبة: (1)}$$

$D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$$f(x) = x^2 + 4x + 3 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 - 2^2 + 3$$

$$f(x) = (x+2)^2 - 4 + 3 = (x+2)^2 - 1$$

بالمقارنة مع كتابة الشكل القانوني:

$$f(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta$$

نجد: $\alpha = 2; \beta = -1; a = 1$

(2) حدد جدول تغيرات الدالة f . لدينا: $a = 1 > 0$ إذن:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$			

(3) أ) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاسيل

$$\text{نحل فقط المعادلة: } f(x) = 0 \text{ يعني } (x+2)^2 - 1 = 0$$

$$\text{يعني } (x+2)^2 = 1 \text{ يعني } x+2 = 1 \text{ أو } x+2 = -1$$

$$\text{يعني } x = -1 \text{ أو } x = -3$$

ومنه نقط التقاطع هما: $A(-3; 0)$ و $B(-1; 0)$

ملاحظة: يمكن حل المعادلة باستعمال المميز

ب) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتايب

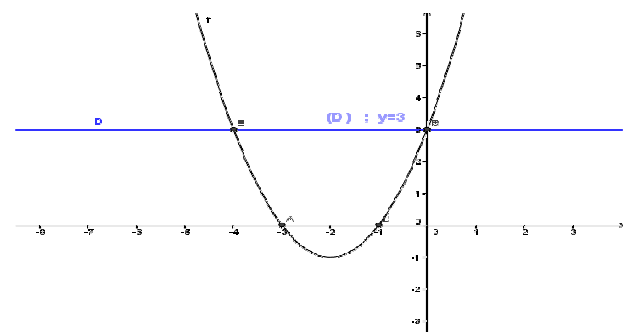
نحسب فقط: $f(0)$

$$f(0) = 3$$

ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0; 3)$

(4) رسم: C_f

-5	-4	-3	-2	-1	0	1
8	3	0	-1	0	3	8



(5) حدد نقط تقاطع (C_f) و (D)

$$\text{نحل للمعادلة } f(x) = y \text{ يعني } f(x) = 3$$

$$f(x) = 3 \text{ يعني } (x+2)^2 - 1 = 3$$

$$\text{يعني } (x+2)^2 = 4 \text{ يعني } x+2 = 2 \text{ أو } x+2 = -2$$

$$\text{يعني } x = 0 \text{ أو } x = -4 \text{ ومنه نقط التقاطع هما: } C(0; 3) \text{ و } E(-4; 3)$$

ملاحظة: يمكن حل المعادلة باستعمال المميز

(6) الحل المبياني للمتراحة: $x^2 + 4x \geq 0$

$$x^2 + 4x \geq 0 \text{ تعني } x^2 + 4x + 3 \geq 3 \text{ تعني } f(x) \geq 3$$

مبيانيا نبحث عن المجال بحيث منحنى الدالة f يوجد فوق

المستقيم (D) أي $S =]-\infty, -4] \cup [0, +\infty[$

V. التمثيل المبياني و تغيرات الدالة: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

(2) إنجاز القسمة الاقليدية:

$$\begin{array}{r} 2x-2 \\ -3x-1 \\ \hline -3x+3 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{3x-1}{2x-2} = \frac{\frac{3}{2}(2x-2)+2}{2x-2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{x-1}$$

بالمقارنة مع كتابة الشكل القانوني: $f(x) = \beta + \frac{k}{x+\alpha}$

نجد : $\alpha = -1; \beta = \frac{3}{2}; k = 1$

(3) حدد جدول تغيرات الدالة f . لدينا : $k=1 > 0$ اذن :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$			

منحنى f هو هذلوليا مركزه $S(1; \frac{3}{2})$ و مقارباه $x=1$ و $y=\frac{3}{2}$

(4)أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x) = 0$ يعني $\frac{3x-1}{2x-2} = 0$ يعني $3x-1=0$

يعني $3x=1$ يعني $x=\frac{1}{3}$

ومنه نقطة التقاطع هي: $A(\frac{1}{3}; 0)$

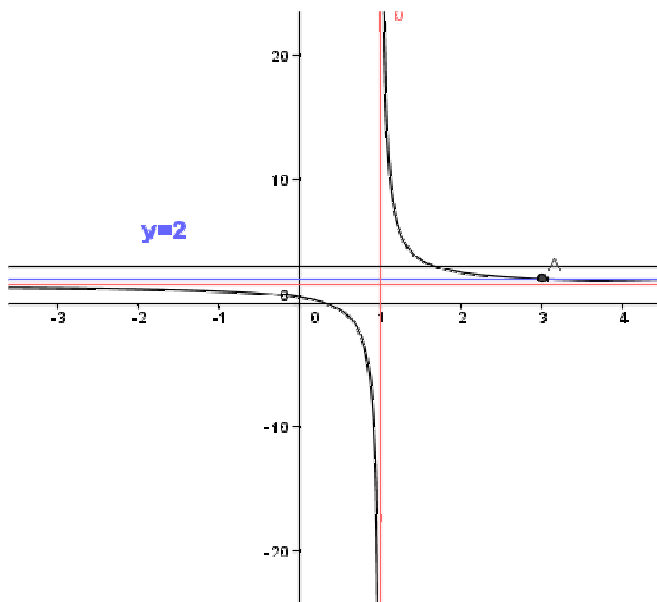
(ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتيب

نحسب فقط : $f(0) = \frac{1}{2}$

ومنه نقطة التقاطع هي: $B(0; \frac{1}{2})$

(5 و 6)

-2	-1	0	1	2	3	4
$\frac{7}{6}$	1	$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$	2	$\frac{11}{6}$



(4)أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x) = 0$ يعني $\frac{2x+1}{x-1} = 0$ يعني $2x+1=0$

يعني $2x=-1$ يعني $x=-\frac{1}{2}$ ومنه نقطة التقاطع هي: $A(-\frac{1}{2}; 0)$

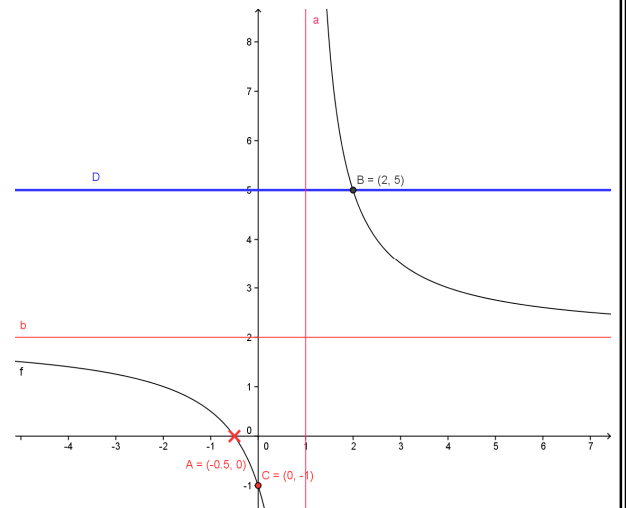
(ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتيب

نحسب فقط : $f(0) = -1$

ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0; -1)$

(5 و 6) ورسم C_f

-2	-1	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{2}$	-1		5	$\frac{7}{2}$	3



(7)الحل المبياني للمعادلة $f(x) = 5$: هو أفصيل نقط تقاطع C_f و

المستقيم (D) أي أفصول النقطة $B(2; 0)$

ومنه مجموعة الحلول : $S = \{2\}$

(ب)الحل الجبري للمعادلة $f(x) = 5$:

$f(x) = 5$ يعني $\frac{2x+1}{x-1} = 5$ يعني $2x+1=5(x-1)$

يعني $2x+1=5x-5$ يعني $-3x=-6$ يعني $x=2$

ومنه مجموعة الحلول : $S = \{2\}$

(8)الحل المبياني للمتراجحة: $f(x) \geq 5$

مبيانيا نبحث عن المجال بحيث منحنى الدالة f يوجد فوق

المستقيم (D) أي $S =]1, 2]$

تمرين 7: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = \frac{3x-1}{2x-2}$

(1) حدد D_f

(2) أكتب $f(x)$ على الشكل المختصر وحدد مقاربات منحنى الدالة f

(3) حدد جدول تغيرات الدالة f

(4) حدد نقط تقاطع منحنى الدالة f مع محوري المعلم

(5) أرسم (C) التمثيل المبياني للدالة

(6) أرسم المستقيم الذي معادلته : المستقيم (D) الذي معادلته : $y = 2$

(7) حدد نقط تقاطع منحنى الدالة f و المستقيم (D)

(8) حل مبيانيا المتراجحة: $f(x) \geq 2$

أجوبة : $f(x) = \frac{3x-1}{2x-2}$

(1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x-2 \neq 0\}$ ومنه $-2x+2$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$		4	

(3) أ) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاسيل

نحل فقط المعادلة : $f(x) = 0$ يعني $-x^2 + 2x + 3 = 0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a = -1$ و $b = 2$ و $c = 3$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 = (4)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{-2} = 3 \text{ و } x_1 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{-2} = -1$$

ومنه نقط التقاطع هما: $B(3;0)$ أو $A(-1;0)$

ملاحظة: يمكن حل المعادلة بطريقة أخرى باستعمال الكتابة الأخرى ل $f(x)$

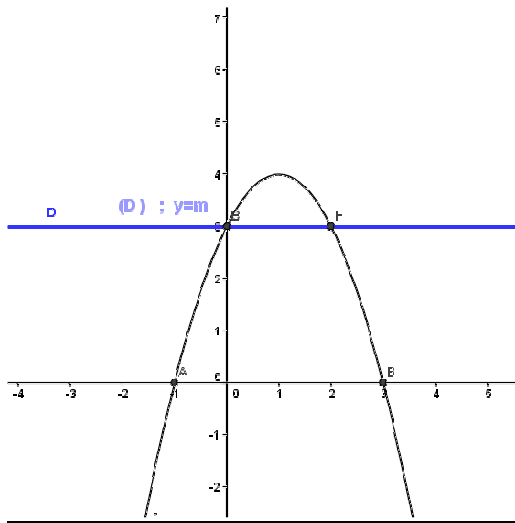
(ب) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتيب

نحسب فقط : $f(0)$

$$f(0) = -0^2 + 2 \times 0 + 3 = 3 \text{ ومنه نقطة التقاطع هي: } C(0;3)$$

-2	-1	0	1	2	3	4
-5	0	3	4	3	0	-5

(4) رسم: C_f



$$f(x) = -(x-1)^2 + 4 \quad (5)$$

لدينا $-(x-1)^2 \leq 0$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$.

ومنه $4 - (x-1)^2 \leq 4$ أي $f(x) \leq 4$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$

وبالتالي إن 4 هي قيمة قصوى للدالة f على $\mathbb{R}$

يمكننا ملاحظة ذلك من جدول التغيرات

(6) المناقشة مبيانيا حسب قيم البارامتر m ل عدد حلول المعادلة

$$-x^2 + 2x + 3 - m = 0 :$$

$$f(x) = m \text{ أي } -x^2 + 2x + 3 = m \text{ تكافئ } -x^2 + 2x + 3 - m = 0$$

أي نحدد مبيانيا عدد نقط تقاطع منحنى الدالة f و المستقيم (D) الذي

معادلته : $y = m$

إذا كانت : $m > 4$ التمثيل المبياني لا يقطع المستقيم (D) ومنه لا

يوجد حل لهذه المعادلة أي $S = \emptyset$

(7) نحل للمعادلة $f(x) = 2$:

$$f(x) = 2 \text{ يعني } \frac{3x-1}{2x-2} = 2 \text{ يعني } 3x-1 = 2(2x-2)$$

$$\text{يعني } 3x-1 = 4x-4 \text{ يعني } x = 3$$

ومنه نقطة التقاطع هي : $C(3;2)$

(8) الحل المبياني للمتراجحة: $f(x) \geq 2$

مبيانيا نبحث عن المجال بحيث منحنى الدالة f يوجد فوق

المستقيم (D) أي $S =]1,3]$

VI. القيم القصوى و القيم الدنيا لدالة عددية على مجال:

نشاط 1: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

(1) أحسب $f(-1)$ و تأكد أن : $f(x) = (x+1)^2 + 2$

(2) تأكد أن : $f(x) \geq f(-1)$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$.

$$\text{أجوبة: (1) } f(-1) = (-1)^2 + 2 \times (-1) + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$$

$$(2) f(x) - f(-1) = (x+1)^2 + 2 - 2 = (x+1)^2 \geq 0$$

ومنه : $f(x) \geq f(-1)$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$.

نقول إن $f(-1)$ هي قيمة دنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و a عنصرا من I .

نقول إن $f(a)$ هي القيمة القصوى للدالة f على المجال I إذا و فقط

إذا كان: $f(x) \leq f(a)$ لكل x من I .

نقول إن $f(a)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال I إذا و فقط إذا

كان: $f(x) \geq f(a)$ لكل x من I .

نقول كذلك الدالة f تقبل قيمة قصوى (أو دنيا) عند النقطة a على

المجال I .

إذا كان $f(a)$ قيمة قصوى أو قيمة دنيا للدالة f نقول إن $f(a)$

مطراف للدالة f .

تمرين 8: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

(1) حدد D_f و بين أن : $f(x) = -(x-1)^2 + 4$.

(2) حدد جدول تغيرات الدالة f .

(3) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاسيل

ومع محور لأرتيب.

(4) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f .

(5) حدد مطارياف الدالة إن وجدت.

(6) ناقش مبيانيا حسب قيم البارامتر m عدد حلول المعادلة

$$-x^2 + 2x + 3 - m = 0 :$$

أجوبة :

(1) $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3 = -(x^2 - 2x) + 4 = -(x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2 - 1^2) + 4$$

$$f(x) = -(x-1)^2 + 4$$

بالمقارنة مع كتابة الشكل القانوني:

$$f(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta$$

نجد : $\alpha = -1; \beta = 4; a = -1$

(2) حدد جدول تغيرات الدالة f

لدينا : $a < 0$ انن :

$$x^2 = 1 \text{ يعني } x^2 = 4 \text{ يعني } x = \sqrt{4} \text{ أو } x = -\sqrt{4} \text{ يعني } x = 2$$

$$x = -2 \text{ ومنه فان مجموعة الحلول : } S = \{-2; 2\}$$

$$(7) \text{ رسم المستقيم الذي معادلته : } y = \frac{1}{2}x + 2 : (D)$$

$$(8) \text{ أ) الحل المبياني للمعادلة } f(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

الحل المبياني للمعادلة هو أفاصيل نقط تقاطع C_f و

$$\text{المستقيم } (D) : y = \frac{1}{2}x + 2 \text{ وبما أن نقط التقاطع هما } E(4,4) \text{ و}$$

$$B(-2,1)$$

$$\text{ومنه فان مجموعة الحلول : } S = \{-2; 4\}$$

$$\text{أ) الحل الجبري للمعادلة } f(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \text{ يعني } x^2 = 2x + 8 \text{ يعني } \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}x + 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 36 = (6)^2 > 0 \text{ يعني}$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = -2 \text{ و } x_1 = 4$$

$$\text{ومنه فان مجموعة الحلول : } S = \{-2; 4\}$$

$$(9) \text{ أ) الحل المبياني للمتراجحة } \frac{1}{4}x^2 - 2 \geq \frac{1}{2}x$$

$$f(x) \geq \frac{1}{2}x + 2 \text{ يعني } \frac{1}{4}x^2 \geq \frac{1}{2}x + 2$$

ومنه مبيانيا نبحت عن المجال بحيث منحنى الدالة f يوجد فوق

$$\text{المستقيم } (D) : y = \frac{1}{2}x + 2 \text{ أي } S =]-\infty, -2] \cup [4, +\infty[$$

$$\text{ب) الحل الجبري للمتراجحة } \frac{1}{4}x^2 - 2 \geq \frac{1}{2}x$$

$$x^2 - 2x - 8 \geq 0 \text{ يعني } x^2 \geq 2x + 8 \text{ يعني } \frac{1}{4}x^2 \geq \frac{1}{2}x + 2$$

$$x_2 = -2 \text{ و } x_1 = 4$$

جدول الاشارة:

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
$x^2 - 2x - 8$	+	0	-	+

$$\text{أي } S =]-\infty, -2] \cup [4, +\infty[$$

$$\text{تمرين 10: لتكن } f \text{ دالة معرفة ب: } f(x) = -\frac{1}{2}x^2$$

$$(1) \text{ مثل الدالة } f \text{ في معلم متعامد ممنظم } (o; \vec{i}; \vec{j}).$$

$$(2) \text{ حل مبيانيا المتراجحة } f(x) > -2$$

إذا كانت: $m = 4$ التمثيل المبياني يقطع المستقيم (D) في نقطة

$$S = \{x_1\}$$

وحيدة ومنه للمعادلة حل وحيد

إذا كانت: $m < 4$ التمثيل المبياني يقطع المستقيم (D) في نقطتين

$$S = \{x_1, x_2\}$$

ومنه للمعادلة حلين مختلفين

تمرين 9: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = \frac{1}{4}x^2$

(1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

(2) أدرس زوجية الدالة f حدد جدول تغيرات الدالة f

(4) هل الدالة f تقبل قيمة دنيا أو قيمة قصوى؟

(5) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$

(6) حل مبيانيا ثم جبريا المعادلة $f(x) = 1$

(7) أرسم المستقيم الذي معادلته: $y = \frac{1}{2}x + 2 : (D)$

(8) حل مبيانيا ثم جبريا المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

(9) حل مبيانيا ثم جبريا المتراجحة: $\frac{1}{4}x^2 - 2 \geq \frac{1}{2}x$

أجوبة: (1) $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(2) أ) لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$.

$$f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^2 = \frac{1}{4}x^2 = f(x) \text{ (ب)}$$

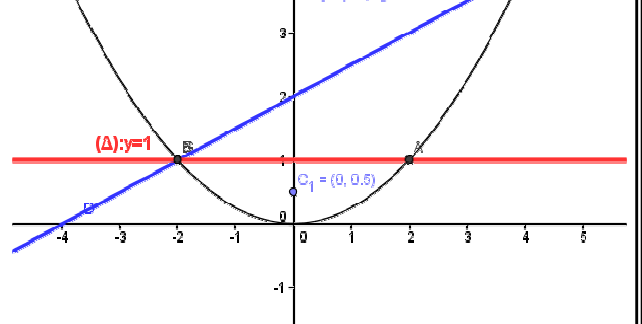
ومنه f دالة زوجية

(3) حدد جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		0	

(4) الدالة f تقبل قيمة دنيا عند: $x = 0$

(5) رسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f



(6) أ) الحل المبياني للمعادلة: $f(x) = 1$

الحل المبياني للمعادلة هو أفاصيل نقط تقاطع C_f و

المستقيم $(\Delta): y = 1$ وبما أن نقط التقاطع هما $A(2,1)$ و $B(-2,1)$

فان مجموعة الحلول: $S = \{-2; 2\}$

ب) الحل الجبري للمعادلة: $f(x) = 1$

$$f(x) = y \text{ يعني } \frac{2}{x} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

الحل المبياني للمعادلة هو أفاصيل نقط تقاطع C_f و المستقيم (D)

وبما أن نقط التقاطع هما $A(-1, -2)$ و $A(4, \frac{1}{2})$

فان مجموعة الحلول : $S = \{-1; 4\}$

(الحل الجبري للمعادلة : $\frac{2}{x} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ $x \neq 0$)

$$2x \times \frac{2}{x} = 2x \times \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right) \text{ يعني } \frac{2}{x} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

(بضرب طرفي المعادلة في $2x$)

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \text{ يعني } 4 = x^2 - 3x \text{ يعني}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25 = (5)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = -1 \text{ و } x_1 = 4$$

ومنه فان مجموعة الحلول : $S = \{-1; 4\}$

(6) حل مبياني المتراجحة : $\frac{2}{x} \geq \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

مبيانيا نبحت عن المجال بحيث منحنى الدالة f يوجد فوق

المستقيم (D) أي $S =]-\infty, -1] \cup [0, 4[$

تمرين 12: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

(1) حدد D_f (2) تحقق أن : $f(x) = -(x-2)^2 + 9$

(3) حدد جدول تغيرات الدالة f (4) حدد نقط تقاطع منحنى الدالة

f مع محوري المعلم (5) أرسم (C) التمثيل المبياني للدالة f

(6) حدد القيم الدنيا والقصوى ان وجدت

(7) ناقش مبيانيا حسب قيم البارامتر m عدد حلول المعادلة

$$x^2 - 4x - 5 + m = 0 :$$

أجوبة : (1) $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$$f(x) = -x^2 + 4x + 5 = -(x^2 - 4x) + 5 = -(x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 - 2^2) + 5$$

$$f(x) = -(x-2)^2 + 4 + 5 = -(x-2)^2 + 9$$

بالمقارنة مع كتابة الشكل القانوني : $f(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta$

$$\text{نجد : } \alpha = -2; \beta = 9; a = -1$$

(3) حدد جدول تغيرات الدالة f . لدينا : $a < 0$ اذن :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$		9	

(4) (أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x) = 0$ يعني $-x^2 + 4x + 5 = 0$

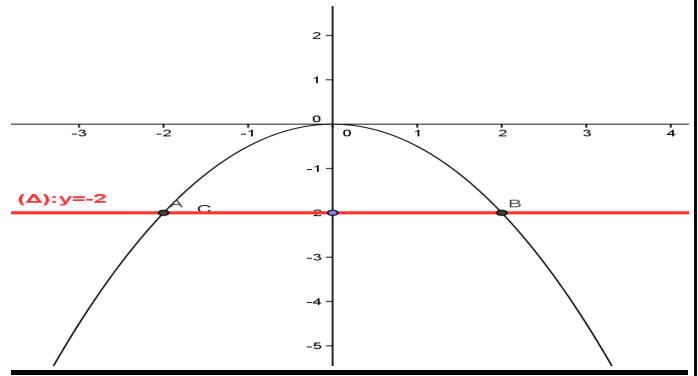
نحل المعادلة باستعمال المميز

$$a = -1 \text{ و } b = 4 \text{ و } c = 5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \times 5 \times (-1) = 36 = (6)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$



(2) مبيانيا نبحت عن المجال بحيث منحنى الدالة f يوجد فوق

المستقيم $y = -2$ أي $S =]-2, 2]$

تمرين 11: لتكن f الدالة المعرفة بـ : $f(x) = \frac{2}{x}$ والمستقيم الذي

$$\text{معادلته : } (D) : y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

(1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

(2) أدرس زوجية الدالة f

(3) حدد جدول تغيرات الدالة f .

(4) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f والمستقيم (D) في معلم

(5) حل مبيانيا ثم جبريا المعادلة $\frac{2}{x} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

(6) حل مبيانيا المتراجحة : $\frac{2}{x} \geq \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

أجوبة : (1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$

ومنه : $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

(2) أ) لكل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا : $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}^*$.

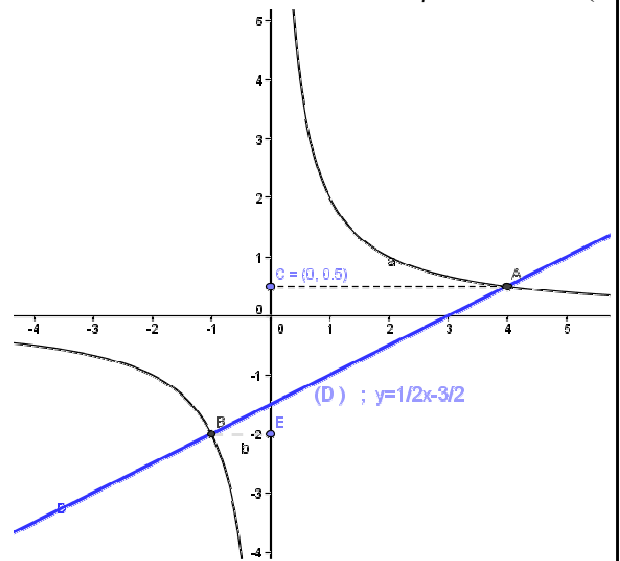
$$\text{ب) } f(-x) = \frac{2}{(-x)} = -\frac{2}{x} = -f(x)$$

ومنه f الدالة فردية

(3) جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

(4) منحنى الدالة f .



(5) (أ)الحل المبياني للمعادلة : $\frac{2}{x} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

$$f(x) = ax^2 + bx + 1$$

(الأجوبة : 1)

$$a \times (1)^2 + b \times 1 + 1 = 5 : \text{يعني } f(1) = 5 : \text{يعني } A(1, 5) \in (C_f)$$

$$a \times (-1)^2 + b \times (-1) + 1 = 1 : \text{يعني } f(-1) = 1 : \text{يعني } B(-1, 1) \in (C_f)$$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+1=5 \\ a-b+1=1 \end{cases} : \text{اذن نحل النظام التالي:}$$

$$a = 2 \Leftrightarrow 2a = 4 : \text{نجمع المعادلتين طرف لطرف فنجد:}$$

$$a = b = 2 \text{ ولدينا } a = b \Leftrightarrow a - b = 0$$

$$f(x) = 2x^2 + 2x + 1 : \text{حسب السؤال السابق (2)}$$

$$\text{نتحقق أن : } f(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

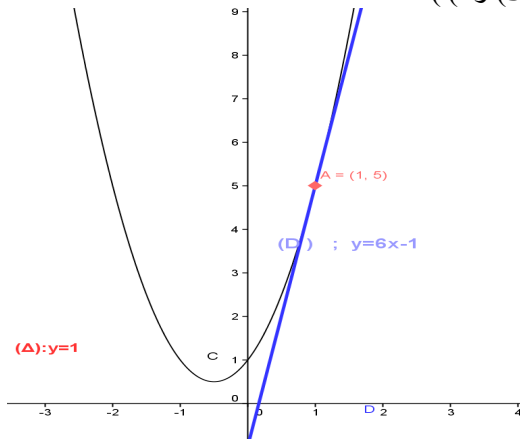
$$2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 2\left(x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + \frac{1}{2} = 2\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= 2x^2 + 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2x^2 + 2x + 1 = f(x)$$

ومنه جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$		$+\infty$
		$1/2$	
$f(x)$		$-1/2$	

(3 و 4) أ)



$$f(x) - y \geq 0 \text{ ؟؟؟؟ أن نبين أن (ب)}$$

$$f(x) - y = 2x^2 + 2x + 1 - 6x + 1 = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x^2 - 2x + 1)$$

$$= 2(x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2) = 2(x - 1)^2 \geq 0$$

لأن المربع دائما موجب ومنه $f(x) \geq y$ وبالتالي (C_f) يوجد فوق المستقيم (D)

انتهى الدرس

$$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{36}}{-2} = 5 \text{ و } x_1 = \frac{-4 + \sqrt{36}}{-2} = -1$$

ومنه نقط التقاطع هما: $A(-1; 0)$ أو $B(5; 0)$

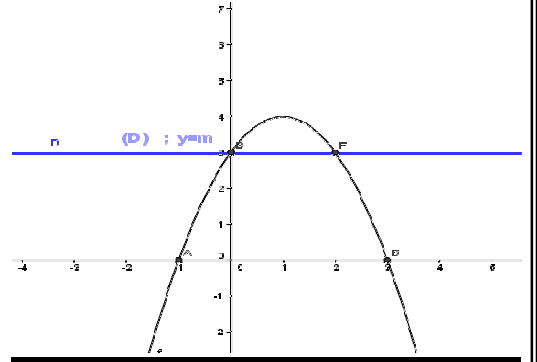
ملاحظة: يمكن حل المعادلة بطريقة أخرى باستعمال الكتابة الأخرى ل $f(x)$ (ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتيب

$$f(0) = -0^2 + 2 \times 0 + 3 = 3 \text{ } f(0) : \text{نحسب فقط}$$

-2	-1	0	1	2	3	4
-5	0	3	4	9	0	-5

ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0; 3)$

(5) رسم: C_f



$$f(x) = -(x-1)^2 + 4 \text{ (6)}$$

لدينا $-(x-1)^2 \leq 0$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$.

ومنه $4 - (x-1)^2 \leq 4$ أي $f(x) \leq 4$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$

وبالتالي إن 4 هي قيمة قصوى للدالة f على $\mathbb{R}$

يمكننا ملاحظة ذلك من جدول التغيرات

(7) المناقشة مبيانيا حسب قيم البارامتر m ل عدد حلول المعادلة

$$-x^2 + 2x + 3 - m = 0 :$$

$$-x^2 + 2x + 3 - m = 0 \text{ تكافئ } -x^2 + 2x + 3 = m \text{ أي } f(x) = m$$

أي نحدد مبيانيا عدد نقط تقاطع منحنى الدالة f والمستقيم (D) الذي

معادلته : $y = m$

إذا كانت $m > 4$: التمثيل المبياني لا يقطع المستقيم (D) ومنه لا

يوجد حل لهذه المعادلة أي $S = \emptyset$

إذا كانت $m = 4$: التمثيل المبياني يقطع المستقيم (D) في نقطة

$$S = \{x_1\}$$

وحيدة ومنه للمعادلة حل وحيد

إذا كانت $m < 4$: التمثيل المبياني يقطع المستقيم (D) في نقطتين

$$S = \{x_1, x_2\}$$

ومنه للمعادلة حلين مختلفين

تمرين 13: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = ax^2 + bx + 1$

(1) حدد a و b علما أن (C_f) التمثيل المبياني للدالة f يمر من

النقطتين $A(1, 5)$ و $B(-1, 1)$

$$(2) \text{ تحقق أن : } f(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \text{ وحدد جدول تغيرات } f$$

(3) أرسم (C_f)

(4) نعتبر المستقيم الذي معادلته $y = 6x - 1$ (D)

(أ) أرسم (D)

(ب) بين أن التمثيل المبياني للدالة f يوجد فوق المستقيم (D)