

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- تعريف وخصائص؛ - الصيغة المثلثية؛ - تعامد متجهتين؛ - بعض تطبيقات الجداء السلمي: - العلاقات المترية في مثلث قائم الزاوية؛ - مبرهنة المتوسط؛ - مبرهنة الكاشي.	- التعبير عن المسافة والتعامد بواسطة الجداء السلمي. - استعمال الجداء السلمي في حل مسائل هندسية. - استعمال مبرهنة الكاشي ومبرهنة المتوسط لحل تمارين هندسية.	- يتم تقديم الجداء السلمي وخصائصه انطلاقا من الإسقاط العمودي. - ينبغي التأكيد على دور هذه الأداة في تحديد بعض المحلات الهندسية في المستوى وفي حساب الأطوال والمساحات وقياسات الزوايا. - تعتبر الصيغة التحليلية للجداء السلمي خارج المقرر.

الجواب: $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = \|\overrightarrow{EF}\| \times \|\overrightarrow{EG}\| \cos(\widehat{FEG}) = -6$

يعني $EF \times EG \cos(\widehat{FEG}) = -6$

يعني $5 \times 3 \cos(\widehat{FEG}) = -6$

يعني $\cos(\widehat{FEG}) = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$

تمرين 4: ليكن ABC مثلثا بحيث $AB = 3$ و $AC = 4$

و $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$ أحسب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

الجواب: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \hat{A} = AB \times AC \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 3 \cos\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right) = 12 \cos\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 12 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 3 \cos\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right) = 12 \cos\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = -12 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

لأن: $\cos(\pi - x) = -\cos x$ إذن:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -12 \times \frac{1}{2} = -6$

II. خصائص الجداء السلمي:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات:

■ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

■ $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

■ $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k\vec{u} \cdot \vec{v}$ مهما يكن k من $\mathbb{R}$.

ملاحظة: $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$ نرسم $\vec{u} \cdot \vec{u}$ ب $\vec{u}^2$ و يسمى المربع السلمي.

■ $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2$ إذن $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$

■ و إذا كانت $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ فإن $AB = \sqrt{AB^2}$

المتطابقات الهامة:

$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

تمرين 5: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين بحيث: $\|\vec{u}\| = 5$ و $\|\vec{v}\| = 3$ و $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{3}{2}$

أحسب $\vec{u}^2$ و $\vec{v}^2$ و $(\vec{u} + \vec{v})^2$ و $(\vec{u} - \vec{v})^2$ و $(\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v})$

$(5\vec{u} - \vec{v})(5\vec{u} + \vec{v})$ و $(3\vec{u} - 2\vec{v})(\vec{u} + 5\vec{v})$

الجواب: $\vec{v}^2 = \|\vec{v}\|^2 = 3^2 = 9$ و $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = 5^2 = 25$

I. تعريف: تعريف 1: الجداء السلمي لمتجهتين:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من المستوى بحيث: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ و H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) .

الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي يرمز له بالرمز $\vec{u} \cdot \vec{v}$ و المعروف بما يلي:

■ إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ لهما نفس المنحى فإن:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH$

■ إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ لهما منحيان متعاكسان فإن:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times AH$

■ و نكتب $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \cdot AC$ أو $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \cdot AH$

تعريف 2: الصيغة المثلثية للجداء السلمي:

إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين و α هو قياس الزاوية $\widehat{BAC}$ حيث $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ فإن:

نتيجة: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha$

مثال أو تمرين 1: ليكن $\frac{\pi}{4}$ قياسا لزاوية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

حيث: $\|\vec{u}\| = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ و $\|\vec{v}\| = 4$ أحسب $\vec{u} \cdot \vec{v}$

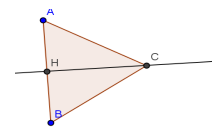
الجواب: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$

تمرين 2: ليكن ABC مثلثا متساوي الأضلاع طول ضلعه يساوي 6cm وليكن H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) .

أحسب $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HB}$ و $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

الجواب: بما أن المثلث متساوي الأضلاع فإن كل زواياه متقايسة وقياس كل زاوية هو $\frac{\pi}{3}$

ومنه: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \hat{A} = AB \times AC \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 6 \times \frac{1}{2} = 18$

$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HB} = \|\overrightarrow{CH}\| \times \|\overrightarrow{HB}\| \times \cos \hat{H} = CH \times HB \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = CH \times HB \times 0 = 0$

تمرين 3: ليكن EFG مثلثا بحيث: $EF = 5$ و $EG = 3$

و $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = -6$ أحسب $\cos(\widehat{FEG})$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC} \quad 1.$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \quad 2.$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) \text{ ومنه}$$

3. هناك علاقيتين مماثلتين للعلاقة الأولى:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \times CB \times \cos(\widehat{ACB})$$

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$$

تمرين 7: ليكن ABC مثلثا بحيث: $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$ و $AC = 8$

و $AB = 5$ (1) أحسب BC (2) $\cos \widehat{ACB}$

الجواب (1): حساب BC

حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \widehat{BAC}$$

$$BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \cos \widehat{BAC}$$

$$\text{يعني: } BC^2 = 89 - 80 \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) \text{ يعني: } BC^2 = 89 - 80 \cos \left(\frac{3\pi - \pi}{3} \right)$$

$$\text{يعني: } BC^2 = 89 - 80 \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \text{ يعني: } BC^2 = 89 - 80 \cos \left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{يعني: } BC^2 = 89 - 80 \left(-\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) \text{ لأن: } \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\text{يعني: } BC^2 = 89 + 80 \left(\frac{1}{2} \right) \text{ يعني: } BC^2 = 89 + 40 \text{ يعني: } BC^2 = 129$$

$$\text{يعني: } BC = \sqrt{129}$$

(2) حساب $\cos \widehat{ACB}$

حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \cos \widehat{ACB}$$

$$\text{يعني: } 5^2 = 8^2 + (\sqrt{129})^2 - 2 \times 8 \times \sqrt{129} \cos \widehat{ACB}$$

$$\text{يعني: } 25 = 64 + 129 - 16\sqrt{129} \cos \widehat{ACB}$$

$$\text{يعني: } 25 - 193 = -16\sqrt{129} \cos \widehat{ACB}$$

$$\text{يعني: } -168 = -16\sqrt{129} \cos \widehat{ACB}$$

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{-168}{-16\sqrt{129}} = \frac{168\sqrt{129}}{2064} = \frac{21\sqrt{129}}{258} = \frac{7\sqrt{129}}{86}$$

V. مبرهنة المتوسط:

خاصية: ليكن ABC مثلثا و I منتصف القطعة $[BC]$

$$\text{لدينا: } AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

تذكير: مبرهنة المتوسط: إذا كانت A و B نقطتين من المستوى P

$$\text{و } I \text{ منتصف القطعة } [AB] \text{ فإن: } MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

مثال: ليكن ABC مثلثا بحيث: $BC = 4cm$ و $AC = 6cm$

و $AB = 3cm$ و لتكن I منتصف $[BC]$ أحسب AI .

الجواب: حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$$3^2 + 6^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}4^2 \text{ يعني: } AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

$$\text{يعني: } 37 = 2AI^2 + \frac{16}{2} \text{ يعني: } 9 + 36 = 2AI^2 \text{ يعني: } 45 - 8 = 2AI^2$$

$$\text{يعني: } AI^2 = \frac{37}{2} \text{ يعني: } AI = \sqrt{\frac{37}{2}}$$

تمرين 8: ليكن ABM مثلثا بحيث: $AB = 4cm$ و $AM = 3cm$

$$BM = 4cm \text{ و}$$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 5^2 + 2(-\frac{3}{2}) + 3^2 = 25 - 3 + 9 = 31$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 5^2 - 2(-\frac{3}{2}) + 3^2 = 25 + 3 + 9 = 37$$

$$(\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

$$(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 5\vec{v}) = 3\vec{u} \cdot \vec{u} + 3\vec{u} \cdot 5\vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{u} - 2\vec{v} \cdot 5\vec{v}$$

$$(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 5\vec{v}) = 3\vec{u}^2 + 15\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 10\vec{v}^2 = 3 \times 25 + 13\vec{u} \cdot \vec{v} - 10 \times 9$$

$$(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 5\vec{v}) = 75 + 13(-\frac{3}{2}) - 90 = -15 - \frac{39}{2} = -\frac{69}{2}$$

$$(5\vec{u} - \vec{v}) \cdot (5\vec{u} + \vec{v}) = (5\vec{u})^2 - (\vec{v})^2 = 25(\vec{u})^2 - (\vec{v})^2 = 25 \times 25 - 9 = 616$$

خاصية: تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين إذا و فقط إذا كان $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ و نكتب $\vec{u} \perp \vec{v}$

نتيجة: $(AB) \perp (CD)$ إذا و فقط إذا كان $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$.

III. علاقات مترية في مثلث قائم الزاوية:

خاصية: ليكن ABC مثلثا و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) .

إذا كان ABC قائما في A فإن:

$$(1) AB^2 + AC^2 = BC^2 \text{ (مبرهنة فيثاغورس)}$$

$$(2) AC \times AB = AH \times BC$$

$$(3) CA^2 = CH \times BC \text{ أو } BA^2 = BH \times BC$$

$$(4) AH^2 = HB \times HC$$

$$\text{براهين: } (1) BC^2 = \overline{BC}^2 = (\overline{BA} + \overline{AC})^2 = \overline{BA}^2 + 2\overline{BA} \cdot \overline{AC} + \overline{AC}^2$$

لدينا: $\overline{BA} \perp \overline{AC}$ لأن ABC قائما في A إذن: $BC^2 = BA^2 + AC^2$

$$(2) \text{ باعتبار المثلث: } (ABC) : \sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} \text{ و باعتبار المثلث:}$$

$$(ABH) : \sin \hat{B} = \frac{AH}{AB} \text{ ومنه } \frac{AC}{BC} = \frac{AH}{AB} \text{ ومنه: } AC \times AB = AH \times BC$$

(3) ليكن ABC مثلثا و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) .

$$\text{باعتبار المثلث: } (ABC) : \cos \hat{A} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{و باعتبار المثلث: } (ABH) : \cos \hat{B} = \frac{BH}{AB} \text{ ومنه } \frac{AB}{AC} = \frac{BH}{AB}$$

$$\text{ومنه } AC^2 = CH \times BC$$

تمرين 6: مثال: ABC مثلث قائم الزاوية في A و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) . أحسب: AC و BH و AH و

$$BC = 5cm \text{ و } AB = 2cm$$

الجواب: حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فإن: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$\text{يعني: } AC^2 = BC^2 - AB^2 = 5^2 - 2^2 = 21$$

$$\text{يعني: } AC = \sqrt{21}cm$$

وحسب العلاقات المترية لدينا: $AB^2 = BH \times BC$

$$\text{يعني: } BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{4}{5}cm$$

$$\text{ولدينا: } AC^2 = CH \times CB \text{ يعني: } CH = \frac{AC^2}{BC} = \frac{21}{5}cm$$

$$\text{ولدينا: } AB \times AC = AH \times BC \text{ يعني: } AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{2\sqrt{21}}{5}cm$$

IV. مبرهنة الكاشي:

خاصية: ليكن ABC مثلثا

$$\text{لدينا: } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

نتائج:

$$= \frac{1}{3}(\overline{AB}^2 + 2\overline{AC} \cdot \overline{AB}) = \frac{1}{3}(AB^2 + 2\overline{AC} \cdot \overline{AB}) = \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0$$

ومنه : $\overline{AD} \cdot \overline{AB} = 0$ وبالتالي $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ أي : $\overline{ABD}$ قائم الزاوية في A

$$\overline{AD}^2 = \left(\frac{1}{3}(\overline{AB} + 2\overline{AC})\right)^2 : \text{اذن } \overline{AD} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + 2\overline{AC}) \quad (4)$$

$$\text{اذن : } \overline{AD}^2 = \frac{1}{9}((\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 + 4\overline{AB} \cdot \overline{AC}) = \frac{1}{9}(AB^2 + 4\overline{AB} \cdot \overline{AC} + 4AC^2)$$

$$\overline{AD} = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3} : \text{اذن } \overline{AD}^2 = \frac{1}{9}\left(1 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \times 2\right) = \frac{1}{9}(1 - 2 + 8) = \frac{7}{9}$$

(5) حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$$1^2 + \sqrt{2}^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}2^2 : \text{يعني } AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

$$1 = 2AI^2 : \text{يعني } 3 - 2 = 2AI^2 : \text{يعني } 3 = 2AI^2 + 2 : \text{يعني } 1 = 2AI^2$$

$$AI = \sqrt{\frac{1}{2}} : \text{يعني } AI^2 = \frac{1}{2}$$

حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$$1^2 + 2^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}^2 : \text{يعني } BA^2 + BC^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}AC^2$$

$$4 = 2BJ^2 : \text{يعني } 5 - 1 = 2BJ^2 : \text{يعني } 5 = 2BJ^2 + 1 : \text{يعني } 4 = 2BJ^2$$

$$BJ = \sqrt{2} : \text{يعني } BJ^2 = 2$$

تمرين 10: ليكن ABC مثلثا بحيث : AC = 2 و BC = 3 و AB = $\sqrt{7}$ و I منتصف القطعة [BC]

(1) باستعمال مبرهنة الكاشي أحسب $\cos(\widehat{BAC})$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 1 : \text{ب) أثبت أن : } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 1$$

(ج) أحسب AI

$$(2) \text{ نعتبر النقطة M بحيث : } \overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{6}\overline{AC}$$

(أ) أحسب $\overline{AM} \cdot \overline{AC}$

$$\overline{MB} \cdot \overline{AC} = 0 : \text{ب) بين أن : } \overline{MB} \cdot \overline{AC} = 0$$

ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (MB) و (AC)

(الجواب: 1) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

$$\text{لدينا: } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \widehat{A}$$

$$9 = 4 + 7 - 4\sqrt{7} \cos(\widehat{A})$$

$$\text{يعني : } -2 = -4\sqrt{7} \cos(\widehat{A})$$

$$\cos(\widehat{A}) = \frac{2}{4\sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{2(\sqrt{7})^2} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

$$(1) \text{ لدينا: } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{A}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 2 \times \sqrt{7} \times \frac{\sqrt{7}}{14} = 2 \times \frac{(\sqrt{7})^2}{14} = \frac{14}{14} = 1$$

(ج) حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC

$$\sqrt{7}^2 + 2^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}3^2 : \text{يعني } AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

$$AI = \sqrt{\frac{13}{4}} : \text{يعني } AI^2 = \frac{13}{4} : \text{يعني } \frac{13}{2} = 2AI^2 : \text{يعني } 11 = 2AI^2 + \frac{9}{2}$$

$$\overline{AM} \cdot \overline{AC} = \left(\frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{6}\overline{AC}\right) \cdot \overline{AC} = \frac{1}{3}\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \frac{1}{6}\overline{AC} \cdot \overline{AC} \quad (2)$$

$$\overline{AM} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{6} \overline{AC}^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} AC^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times 4 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

$$\overline{MB} \cdot \overline{AC} = (\overline{MA} + \overline{AB}) \cdot \overline{AC} = \overline{MA} \cdot \overline{AC} + \overline{AB} \cdot \overline{AC} \quad (2)$$

$$\overline{MB} \cdot \overline{AC} = -\overline{AM} \cdot \overline{AC} + \overline{AB} \cdot \overline{AC} = -1 + 1 = 0$$

و لتكن I منتصف [AB] و J منتصف [AM] و K منتصف [BM]

أحسب المسافات MI و AK و BJ

(الجواب: حساب MI: حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABM لدينا:

$$3^2 + 4^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}4^2 : \text{يعني } MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

$$17 = 2MI^2 : \text{يعني } 9 + 16 = 2MI^2 + \frac{16}{2} : \text{يعني } 17 = 2MI^2$$

$$\text{يعني : } MI^2 = \frac{17}{2} : \text{يعني } MI = \sqrt{\frac{17}{2}}$$

حساب AK: حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABM لدينا:

$$2^2 + 3^2 = 2AK^2 + \frac{1}{2}4^2 : \text{يعني } AB^2 + AM^2 = 2AK^2 + \frac{1}{2}BM^2$$

$$17 = 2AK^2 : \text{يعني } 25 - 8 = 2AK^2 : \text{يعني } 17 = 2AK^2$$

$$\text{يعني : } AK^2 = \frac{17}{2} : \text{يعني } AK = \sqrt{\frac{17}{2}}$$

حساب BJ: حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABM لدينا:

$$4^2 + 4^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}3^2 : \text{يعني } AB^2 + BM^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}AM^2$$

$$\frac{55}{2} = 2BJ^2 : \text{يعني } 32 - \frac{9}{2} = 2BJ^2 : \text{يعني } \frac{55}{2} = 2BJ^2$$

$$\text{يعني : } BJ^2 = \frac{55}{4} : \text{يعني } BJ = \sqrt{\frac{55}{4}} : \text{يعني } BJ = \frac{\sqrt{55}}{2}$$

تمرين 9: ليكن ABC مثلثا بحيث: AB = 1 و AC = $\sqrt{2}$ و CB = 2 و I منتصف القطعة [BC]

ولتكن D نقطة بحيث $\overline{DB} + 2\overline{DC} = \vec{0}$

$$(1) \text{ بين أن : } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = -\frac{1}{2} : \text{استنتج } \cos \widehat{A}$$

$$(2) \text{ اكتب : } \overline{AD} \text{ بدلالة } \overline{AB} \text{ و } \overline{AC}$$

$$(3) \text{ أحسب } \overline{AD} \cdot \overline{AB} \text{ و استنتج طبيعة المثلث ABD}$$

$$(4) \text{ أحسب AD}$$

$$(5) \text{ ليكن I منتصف القطعة [BC] و J منتصف القطعة [AC]}$$

أحسب AI و BJ

(الجواب: 1) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

$$\text{لدينا: } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \widehat{A}$$

$$\text{ونعلم أن : } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \|\overline{AB}\| \times \|\overline{AC}\| \times \cos \widehat{A} = AB \times AC \times \cos \widehat{A}$$

$$\text{اذن : } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overline{AB} \times \overline{AC}$$

$$2^2 = 1^2 + \sqrt{2}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{AC}$$

$$1 = -2\overline{AB} \times \overline{AC} : \text{يعني } 4 = 1 + 2 - 2\overline{AB} \times \overline{AC} : \text{يعني } 1 = -2\overline{AB} \times \overline{AC}$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{استنتج : } \cos \widehat{A} : \text{لدينا: } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{A}$$

$$-\frac{1}{2} = 1 \times \sqrt{2} \times \cos \widehat{A} : \text{يعني } -\frac{1}{2} = AB \times AC \times \cos \widehat{A}$$

$$\cos \widehat{A} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2})^2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\overline{DA} + \overline{AB} + 2(\overline{DA} + \overline{AC}) = \vec{0} : \text{يعني } \overline{DB} + 2\overline{DC} = \vec{0} \quad (2)$$

$$\overline{AB} + 3\overline{DA} + 2\overline{AC} = \vec{0} : \text{يعني } \overline{DA} + \overline{AB} + 2\overline{DA} + 2\overline{AC} = \vec{0}$$

$$\overline{AB} + 2\overline{AC} = 3\overline{AD} : \text{يعني } \overline{AB} + 2\overline{AC} = -3\overline{DA}$$

$$\overline{AD} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + 2\overline{AC}) : \text{يعني}$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + 2\overline{AC}) \cdot \overline{AB} = \frac{1}{3}(\overline{AB} \cdot \overline{AB} + 2\overline{AC} \cdot \overline{AB}) \quad (3)$$

ومنه : $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{AC}$ وبالتالي : $(MB) \perp (AC)$

تمرين 11: ليكن ABC مثلثا بحيث: $AB = 1$ و $BC = AC = \sqrt{2}$ و D نقطة بحيث $\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ و I منتصف القطعة $[AB]$.

1. أحسب CI

2. عبر عن $\overrightarrow{AD}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

3. بين أن : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$

4. استنتج أن : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}$ و استنتج $\cos \widehat{BAC}$

5. أحسب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ و استنتج طبيعة المثلث BAD

6. نعتبر النقطة M حيث : $-3\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

أ. عبر عن $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AC}$ و أحسب $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$

ب. بين أن $(MD) \perp (AC)$

الجواب (1): حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$$\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}1^2 \text{ يعني } BC^2 + AC^2 = 2CI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

$$\frac{7}{4} = CI^2 \text{ يعني } \frac{7}{2} = 2CI^2 \text{ يعني } 4 = 2CI^2 \text{ يعني } \frac{7}{4} = CI^2$$

$$CI = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} - 2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \text{ يعني } \overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

$$-\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \text{ يعني } \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \text{ يعني}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC}$$

لدينا I منتصف القطعة $[AB]$ و ABC متساوي الساقين في C

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC} = 0 \text{ ومنه } (IC) \perp (AB) \text{ أي } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{IC} \text{ ومنه : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC} = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AI}\| \cos 0 = AB \cdot AI \cdot 1 = AB \cdot \frac{AB}{2} \cdot \cos 0$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$AB \times AC \times \cos \hat{A} = \frac{1}{2} \text{ يعني } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \text{ وجدنا } \cos \widehat{BAC}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ يعني } \cos \hat{A} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ يعني } 1 \times \sqrt{2} \times \cos \hat{A} = \frac{1}{2}$$

$$\text{وجدنا } \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \text{ ان :}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot (2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}^2 \text{ يعني}$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \text{ أي } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 2 \times \frac{1}{2} - AB^2 = 1 - 1 = 0$$

ومنه BAD قائم الزاوية في A

$$-3\overrightarrow{MA} + 7(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \text{ يعني } -3\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$3\overrightarrow{AM} - 7\overrightarrow{AM} + 7\overrightarrow{AC} = \vec{0} \text{ يعني } -3\overrightarrow{AM} + 7\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{7}{4}\overrightarrow{AC} \text{ يعني } -4\overrightarrow{AM} = -7\overrightarrow{AC}$$

حساب $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = (2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 2AC^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \text{ يعني } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 2AC^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 2 - \frac{1}{2} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \text{ يعني}$$

$$\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} \text{ (ب)}$$

$$\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{7}{2}$$

$$\overrightarrow{MD} \perp \overrightarrow{AC} \text{ أي } \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{7}{4} \cdot 2 + \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 0$$

$$(MD) \perp (AC) \text{ ومنه}$$

تمرين 12: ليكن ABC مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين رأسه B

بحيث: $AB = \sqrt{2}$

ننشئ خارجه المثلث المتساوي الأضلاع ABD (أنظر الشكل)

1) أحسب: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$

2) أحسب: DC و AC

3) بين أن $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 - \sqrt{3}$

4) تحقق من أن $\widehat{DAC} = \frac{7\pi}{12}$

5) استنتج أن $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

الجواب (1):

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = \|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BD}\| \cos \widehat{ABD} = AB \cdot BD \cdot \cos \frac{\pi}{3} = (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = \|\overrightarrow{BC}\| \cdot \|\overrightarrow{BD}\| \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) = (\sqrt{2})^2 \times -\sin \left(\frac{\pi}{3} \right) = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

2) حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فان: $AC^2 = BC^2 + AB^2$

$$AC^2 = 2^2 + 2^2 = 4 \text{ يعني } AC = 2$$

حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث BCD لدينا:

$$DC^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \times BD \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$DC^2 = 2 + 2 - 2 \times 2 \times -\sin \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

$$DC^2 = 4 + 4 \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) = 4 + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 + 2\sqrt{3} \text{ يعني}$$

$$DC = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \text{ يعني}$$

3) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ACD لدينا:

$$DC^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \times AD \cos(\alpha)$$

$$DC^2 = AC^2 + AD^2 - 2\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}$$

$$(\sqrt{4 + 2\sqrt{3}})^2 = 4 + 2 - 2\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}$$

$$4 + 2\sqrt{3} = 4 + 2 - 2\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \text{ يعني}$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = 1 - \sqrt{3} \text{ يعني}$$

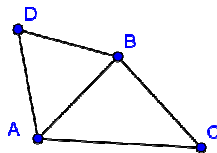
$$\widehat{DAC} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12} \text{ (4)}$$

5) وجدنا : $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = 1 - \sqrt{3}$

$$AC \times AD \times \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) = 1 - \sqrt{3} \text{ يعني:}$$

$$2 \times \sqrt{2} \times \cos \left(\frac{7\pi}{12} \right) = 1 - \sqrt{3} \text{ يعني:}$$

$$\cos \left(\frac{7\pi}{12} \right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2 \times \sqrt{2}} = \frac{(1 - \sqrt{3}) \times \sqrt{2}}{2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$



تمرين 13: ليكن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A بحيث:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 16 \text{ و}$$

$$\cos(\hat{BAC}) = \frac{1}{4}$$

و I نقطة بحيث $\overline{BI} = \frac{3}{4} \overline{BA}$ و

J منتصف القطعة $[BC]$. وليكن

(Δ) المستقيم المار من I

والعمودي على المستقيم (AB)

ولتكن نقطة E بحيث $E \in (\Delta)$

(1) أرسم شكلا تقريبا

(2) بين أن: $AB = 8$ وأحسب BC

(3) أحسب: $\overline{BI} \cdot \overline{BA}$

(4) بين أن: $\overline{EB} \cdot \overline{AB} = 48$

(5) أحسب: AJ

(الجواب:1)

(2) لدينا $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 16$ يعني $AB \times AC \times \cos \hat{A} = 16$

يعني $AB \times AB \times \cos \hat{A} = 16$ يعني $AB^2 \times \frac{1}{4} = 16$

يعني $AB^2 = 64$ يعني $AB = 8$

(ب) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \hat{A}$

بالتعويض نجد: $BC^2 = 64 + 64 - 2 \times 64 \times \frac{1}{4}$

يعني: $BC^2 = 96$ يعني $BC = \sqrt{96}$

(3) $\overline{BI} \cdot \overline{BA} = \frac{3}{4} \overline{BA} \cdot \overline{BA} = \frac{3}{4} \overline{BA}^2 = \frac{3}{4} \overline{BA}^2 = \frac{3}{4} \times 64 = 48$

(4) $\overline{EB} \cdot \overline{AB} = (\overline{EI} + \overline{IB}) \cdot \overline{AB} = \overline{EI} \cdot \overline{AB} + \overline{IB} \cdot \overline{AB}$

لدينا $\overline{EI} \cdot \overline{AB} = 0$ لأن $\overline{EI} \perp \overline{AB}$

ومنه: $\overline{EB} \cdot \overline{AB} = \overline{IB} \cdot \overline{AB} = (-\overline{BI}) \cdot (-\overline{BA}) = \overline{BI} \cdot \overline{BA} = 48$

(5) حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC

$8^2 + 8^2 = 2AJ^2 + \frac{1}{2} \sqrt{96}^2$ يعني $AB^2 + AC^2 = 2AJ^2 + \frac{1}{2} BC^2$

يعني: $128 = 2AJ^2 + 48$ يعني: $80 = 2AJ^2$ يعني: $40 = AJ^2$

يعني: $AJ = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

تمرين 13 BIS: ليكن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه B

بحيث: $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 12$ و $\cos(\hat{ABC}) = \frac{1}{3}$

و J نقطة بحيث $\overline{BJ} = \frac{5}{4} \overline{BA}$ و I منتصف القطعة $[AC]$. وليكن

(Δ) المستقيم المار من J والعمودي على المستقيم (AB)

ولتكن نقطة بحيث: $M \in (\Delta)$

1. أرسم شكلا تقريبا

2. بين أن: $AB = 6$ وأحسب AC

3. أحسب: $\overline{BJ} \cdot \overline{BA}$

4. بين أن: $\overline{MB} \cdot \overline{AB} = 45$

5. أحسب: BI

(الجواب:1)

(2) لدينا $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 12$ يعني $\|\overline{BA}\| \times \|\overline{BC}\| \times \cos \hat{B} = 12$

يعني $BA \times BC \times \cos \hat{B} = 12$ يعني $AB^2 \times \frac{1}{3} = 12$

يعني $AB^2 = 36$ يعني $AB = 6$

(ب) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos \hat{B}$

بالتعويض نجد: $AC^2 = 36 + 36 - 2 \times 36 \times \frac{1}{3}$

يعني: $AC^2 = 54$ يعني $AC = \sqrt{54}$

(3) $\overline{BJ} \cdot \overline{BA} = \frac{5}{4} \overline{BA} \cdot \overline{BA} = \frac{5}{4} \overline{BA}^2 = \frac{5}{4} \overline{BA}^2 = \frac{5}{4} \times 36 = 45$

(4) $\overline{MB} \cdot \overline{AB} = (\overline{MJ} + \overline{JB}) \cdot \overline{AB} = \overline{MJ} \cdot \overline{AB} + \overline{JB} \cdot \overline{AB}$

لدينا $\overline{MJ} \cdot \overline{AB} = 0$ لأن $\overline{MJ} \perp \overline{AB}$

ومنه: $\overline{MB} \cdot \overline{AB} = \overline{JB} \cdot \overline{AB} = (-\overline{BJ}) \cdot (-\overline{BA}) = \overline{BJ} \cdot \overline{BA} = 45$

(5) حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC

$6^2 + 6^2 = 2BI^2 + \frac{1}{2} \sqrt{54}^2$ يعني $AB^2 + BC^2 = 2BI^2 + \frac{1}{2} AC^2$

يعني: $72 = 2BI^2 + 27$ يعني: $45 = 2BI^2$ يعني: $BI^2 = \frac{45}{2}$ يعني: $BI = \sqrt{\frac{45}{2}}$

تمرين للبحث: يكن ABC مثلثا بحيث: $AB = 1$ و $AC = 3$

و I منتصف القطعة $[AB]$. $\widehat{CAB} = \frac{2\pi}{3}$

(1) بين أن $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -\frac{3}{2}$

(2) لتكن E النقطة بحيث: $\overline{BE} = \frac{1}{5} \overline{BC}$

(أ) بين أن $\overline{AE} = \frac{4}{5} \overline{AB} + \frac{1}{5} \overline{AC}$ ثم أحسب $\overline{AB} \cdot \overline{AE}$

(ب) بين أن $(AB) \perp (IE)$

انتهى الدرس

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien



حول الدرس