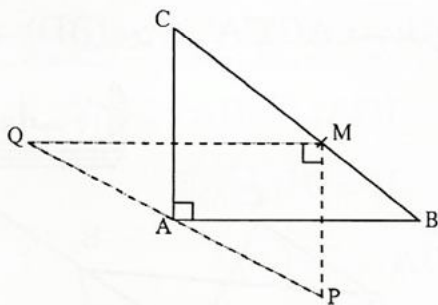


5 - التطبيقات السابقة تحافظ على الاستقامية ومعاملها وعلى المنتصف وعلى صور الأشكال ...
A' و B' و C' هي صور A , B , C على التوالي.

تمارين وحلولها

تمرين 1 :

- ABC مثلث قائم الزاوية في A .
M نقطة تنتمي إلى القطعة [BC] .
النقطة P مائلة النقطة M بالنسبة للمستقيم (AB) و Q مائلة M بالنسبة للمستقيم (AC) .
(1) - بين أن النقط A و P و Q مستقيمة (باستعمال الثمائل المحوري) .
(2) - باستعمال الثمائل المحوري بين أن A منتصف [PQ] .



الجواب :

(1) - لدينا : $S_{(AB)}(M) = P$

$S_{(AB)}(A) = A$

$S_{(AB)}(B) = B$

إذن صورة الزاوية $\widehat{BAM}$ بـ $S_{(AB)}$ هي الزاوية $\widehat{BAP}$.

ومنه $\widehat{BAM} = \widehat{BAP}$

لدينا كذلك : $S_{(AC)}(A) = A$ و $S_{(AC)}(C) = C$ و $S_{(AC)}(M) = Q$

إذن صورة الزاوية $\widehat{CAM}$ بـ $S_{(AC)}$ هي الزاوية $\widehat{CAQ}$.

ومنه : $\widehat{CAM} = \widehat{CAQ}$

وبما أن $\widehat{BAM} + \widehat{CAM} = 90^\circ$ فإن : $\widehat{BAP} + \widehat{CAQ} = 90^\circ$

لدينا : $\widehat{QAP} = \widehat{QAC} + \widehat{CAB} + \widehat{BAP}$

$= \widehat{QAC} + \widehat{BAP} + \widehat{CAB}$

$= 90^\circ + 90^\circ$

$= 180^\circ$

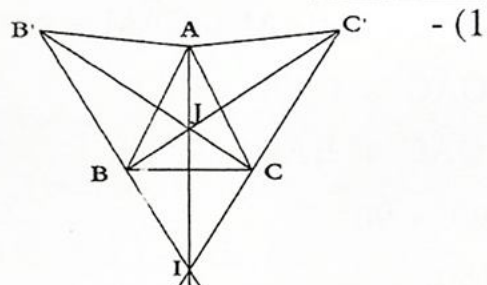


وبما أن الثمائل المحوري يحافظ على المنتصف وبما أن I منتصف [AC] فإن I منتصف [A'C'] إذن [AC] و [A'C'] لهما نفس المنتصف I ومنه AC'CA متوازي الأضلاع. (1)
لدينا : $S_{(BD)}(A') = A$ و $S_{(BD)}(C) = C'$
إذن صورة المستقيم (A'C) بالثمائل المحوري $S_{(BD)}$ هي المستقيم (AC').
وبما أن $(A'C) \parallel (AC')$ فإن $(A'C) \parallel (BD)$
(2) $(CC') \perp (AC')$ و $(CC') \perp (BD)$
من (1) و (2) فإن AC'CA' مستطيل.

تمرين 3:

ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A.
نشئ خارج هذا المثلث : المثلثين المتساوي الأضلاع AB'C و AC'B.
(BB') و (CC') يتقاطعان في I و (B'C) و (BC') يتقاطعان في J.
(1) - أنشئ الشكل.
(2) - باستعمال تماثل محوري، بين أن I و J و A مستقيمة.

الجواب :

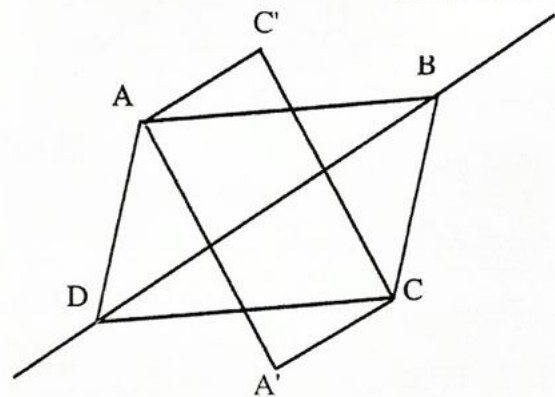


إذن النقط A و Q و P مستقيمة.
(2) - لدينا $S_{(AB)}(A) = A$ و $S_{(AB)}(M) = P$
إذن : $AM = AP$ (1)
لدينا كذلك : $S_{(AC)}(M) = Q$
و $S_{(AC)}(A) = A$
إذن : $AM = AQ$ (2)
من (1) و (2) نستنتج أن $AP = AQ$
وبما أن A و P و Q مستقيمة فإن A منتصف [PQ].

تمرين 2:

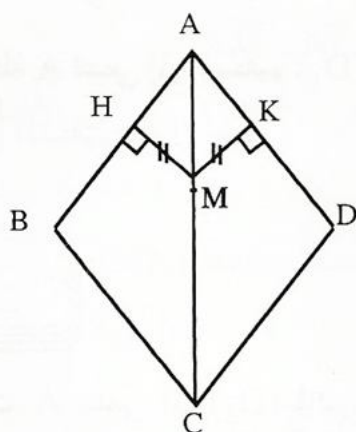
ليكن ABCD متوازي الأضلاع A' و B' على التوالي صورتا A و C بالثمائل المحوري الذي محوره (BD) بين أن AC'CA' مستطيل.

الجواب :



لدينا ABCD متوازي الأضلاع ليكن I منتصف القطرين [AC] و [BD].
لدينا : $S_{(BD)}(A) = A'$ و $S_{(BD)}(C) = C'$
و $S_{(BD)}(I) = I$ لأن $I \in (BD)$

لدينا $S_{(\Delta)}(B) = C$ و $S_{(\Delta)}(A) = A$ إذن صورة القطعة $[AB]$ بـ $S_{(\Delta)}$ هي القطعة $[AC]$ وبما أن I منتصف $[AB]$ و $S_{(\Delta)}$ يحافظ على المنتصف فإن $S_{(\Delta)}(I) = J$ ولدينا $S_{(\Delta)}(B) = C$ أي أن $S_{(\Delta)}(C) = B$ إذن $CI = BJ$ لأن الثمائل المحوري يحافظ على المسافة.



(AC) محور ثمائل لـ ABCD إذن $S_{(BD)}((AB)) = (AD)$

نضع : $S_{(AC)}(H) = H'$

إذن $H' \in (AD)$ ①

ولدينا : $S_{(AC)}(M) = M$

و $S_{(AC)}(A) = A$ و $S_{(AC)}(H) = H'$

إذن صورة الزاوية $\widehat{AHM}$ بـ $S_{(AC)}$ هي الزاوية $\widehat{AH'M}$.

إذن $\widehat{AH'M} = 90^\circ$ ②

من ① و ② نستنتج أن $H' = K$ إذن

$S_{(AC)}(M) = M$ و $S_{(AC)}(H) = K$

إذن $MH = MK$ لأن الثمائل المحوري يحافظ على المسافة.

(2) - بما أن ABC مثلث متساوي الساقين في A فإن (Δ) واسط القطعة $[BC]$ هو محور ثمائل له. لدينا $S_{(\Delta)}(B) = C$ و $S_{(\Delta)}(B') = C'$ لأن ABB' و ACC' ممتثلان بالنسبة لـ (Δ) . وبما أن $(B'B) \cap (CC') = \{I\}$ فإن $I \in (\Delta)$

لدينا كذلك $S_{(\Delta)}(C) = B$ و $S_{(\Delta)}(B') = C'$ إذن (CB') و (BC') ممتثلان بالنسبة لـ (Δ) وبما أن $(BC') \cap (B'C) = \{J\}$ فإن $J \in (\Delta)$ ولدينا $A \in (\Delta)$ إذن النقط A و I و J مستقيمة.

تمرين 4 :

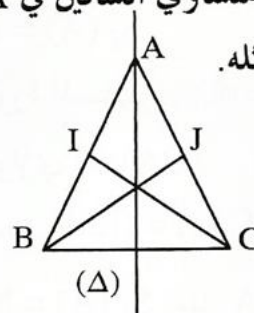
(1) - ABC مثلث متساوي الساقين في A و I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AC]$.

باستعمال ثمائل محوري : بين أن : $BJ = CI$

(2) - ABCD معين و M نقطة تنتمي إلى $[BC]$ H و K هما على التوالي مسقطي M على المستقيمين (AB) و (AD) باستعمال ثمائل محوري بين أن : $MH = MK$

الجواب :

(1) - ABC مثلث متساوي الساقين في A . * نعتبر (Δ) محور ثمائله.



تمرين 6:

A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمة و M نقطة من (BC) مخالفة ل B و C . (Δ) هو المستقيم الذي يمر من A ويوازي (BC).

المستقيم الموازي لـ (AB) و المار من M يقطع (Δ) في D والمستقيم الموازي لـ (AC) و المار من M يقطع (Δ) في E.

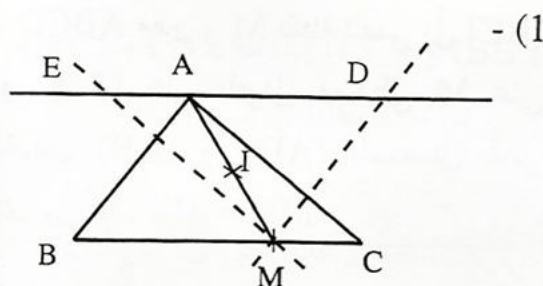
(1) - أنشئ الشكل .
(2) - لتكن I منتصف القطعة [AM].
أ - حدد صورة المستقيمين (CA) و (CM) بـ S_I .

ب - استنتج صورة النقطة C بـ S_I .

(3) - بين أن : $S_I(B) = D$

واستنتج أن $(BE) \parallel (CD)$.

الجواب :



(2) - أ - لدينا I منتصف [AM].

إذن $S_I(A) = M$

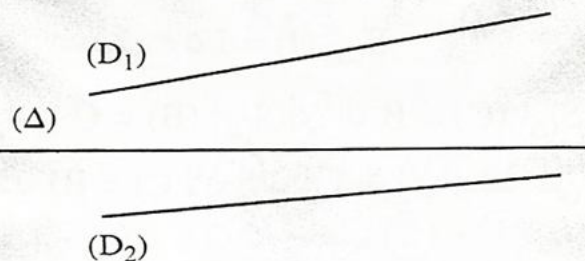
إذن صورة المستقيم (CA) هو المستقيم المار من M والموازي لـ (CA).

إذن لدينا $S_I((CA)) = (EM)$

لدينا $S_I(A) = M$ إذن $S_I(M) = A$

تمرين 5:

نعتبر الشكل التالي :



أوجد نقطة A تنتمي إلى المستقيم (D_1) ونقطة B تنتمي إلى المستقيم (D_2) حيث :

$$B = S_{(\Delta)}(A)$$

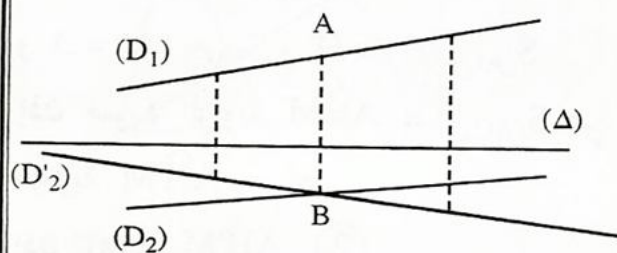
الجواب :

إذا كانت A تنتمي إلى (D_1) فإن $S_{(\Delta)}(A)$ تنتمي إلى (D'_1) المستقيم حيث :

$$S_{(\Delta)}((D_1)) = (D'_1) \text{ أي أن } B \in (D'_1) \text{ إذن}$$

B هي نقطة تقاطع (D_1) و (D_2) .

الإنشاء :

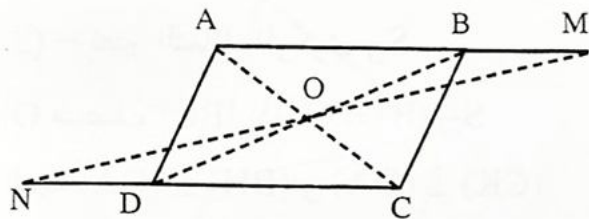


نشئ (D'_1) مماثل (D_1) بالنسبة لـ (Δ) ثم

نحصل على النقطة B نقطة تقاطع (D'_1)

و (D_2) ومن ثم نشئ العمودي على (Δ) و المار

من B ، هذا المستقيم الأخير يقطع (D_1) في A.



(2) - لدينا $\vec{AM} = k \vec{AB}$ و $\vec{CN} = k \vec{CD}$
 إذن $\vec{NC} = k \vec{DC}$ و $\vec{AM} = k \vec{AB}$
 وبما أن ABCD متوازي الأضلاع فإن $\vec{AB} = \vec{DC}$
 وبالتالي : $\vec{AM} = \vec{NC}$
 إذن الرباعي AMCN متوازي الأضلاع ومنه
 للقطعتين [AC] و [NM] نفس المنتصف O.
 إذن O منتصف القطعة [MN] أي أن :
 $S_O(M) = N$

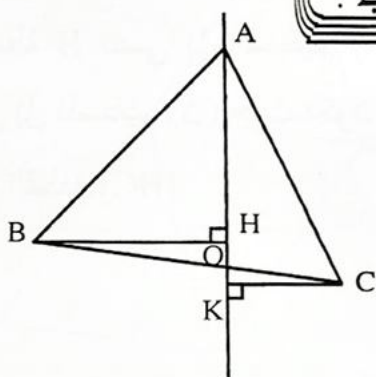
تمرين 8 :

ABC مثلثا و O منتصف القطعة [BC].
 H المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم
 (AO) و K المسقط العمودي للنقطة C على
 المستقيم (AO).

- (1) - أنشئ الشكل.
- (2) - بين أن الرباعي BHCK متوازي الأضلاع.

الجواب :

(1)



إذن صورة المستقيم (CM) بـ S_I هو المستقيم
 المار من A والموازي لـ (CM)
 أي أن $S_I((CM)) = (\Delta)$
 ب - لدينا : $(CM) \cap (CA) = \{C\}$
 و (EM) و (Δ) صورتا (CA) و (CM) على
 التوالي بـ S_I .

إذن صورة C بـ S_I هي نقطة تقاطع (Δ)
 و (EM) أي أن : $S_I(C) = E$
 (3) - بنفس الطريقة نبين أن :

$S_I((BM)) = (\Delta)$ و $S_I(AB) = (MD)$
 ولدينا $(BM) \cap (AB) = \{B\}$

إذن صورة B بـ S_I هي نقطة تقاطع المستقيمين
 (MD) و (Δ) أي أن : $S_I(B) = D$
 لدينا $S_I(C) = E$ إذن $S_I(E) = C$

ولدينا $S_I(B) = D$
 إذن $S_I((BE)) = (CD)$

وبالتالي : $(BE) \parallel (CD)$

تمرين 7 :

ABCD متوازي الأضلاع مركزه O.

M و N نقطتان على (AB) و (CD) بحيث :

$$\vec{AM} = k \vec{AB} \text{ و } \vec{CN} = k \vec{CD}$$

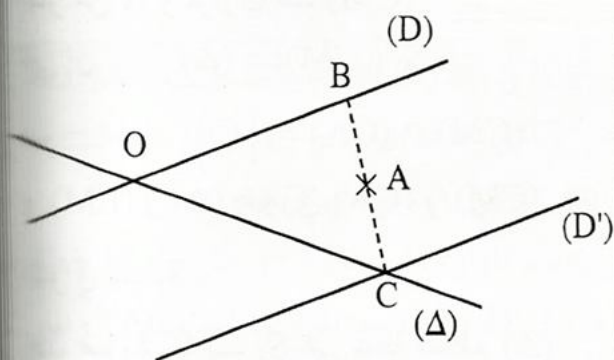
(1) - أنشئ الشكل.

(2) - بين أن : $S_O(M) = N$

الجواب :

(1)

الجواب :



* ننشئ (D') صورة (D) بالتمثيل S_A .

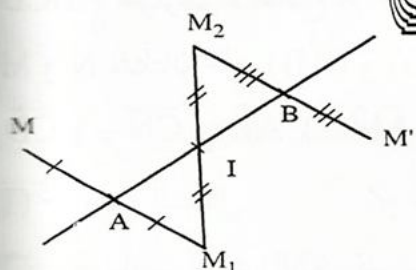
$S_A((D)) = (D')$: أى أن :

(D') يقطع (Δ) في نقطة C و (AC) يقطع
المستقيم (D) في النقطة B. وهكذا نحصل على
النقطتين B و C حيث A منتصف القطعة [BC].

تمرین 10:

A و B نقطتين مختلفتين و I منتصف القطعة
[AB] نعتبر الشماتلات المركزية S_A و S_B و S_I
التي مراكزها A و B و I على التوالي.
أثبت أن : $S_B \circ S_I \circ S_A = S_A$.

الجواب :



لتكن M نقطة من المستوى (P).

M_1 صورة M بالتمثيل S_A و M_2 صورة M_1

بـ S_I و M' صورة M_2 بـ S_B .

(2) - نعتبر الشماثل المركزي S_0

O منتصف [BC] إذن $S_O(B) = C$

لدينا $(OA) \perp (BH)$ و $(OA) \perp (CK)$

إذن (BH) // (CK)

وبما أن $S_O(B) = C$ فإن صورة المستقيم

(BH) بالتمائل المركزي S_0 هو المستقيم المار

من C والموازي لـ (BH) أي أن :

$$S_O((BH)) = (CK)$$

ولدينا : $S_0(OA) = (OA)$ وبما أن :

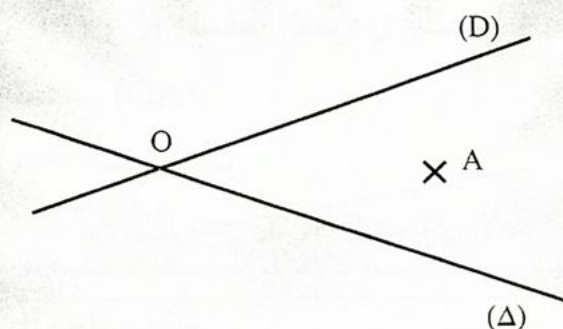
$$(\text{BH}) \cap (\text{OA}) = \{ \text{H} \}$$
$$(OA) \cap (CK) = \{K\} \text{ و}$$

فإن $S_O(H) = K$ إذن O منتصف (HK)

وبالتالي الرابعى BHCK متوازي الأضلاع.

تمرین 9:

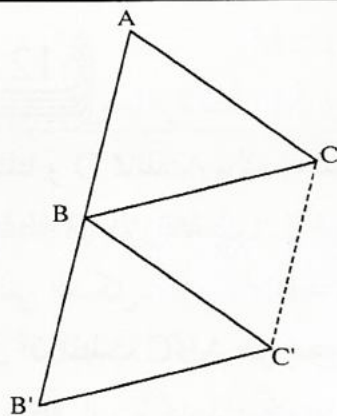
نعتبر الشكل التالي :



أنشئ نقطة B تنتمي إلى المستقيم (D) ونقطة

C تنتمي إلى المستقيم (Δ) حيث تكون النقطة A

منتصف القطعة [BC].

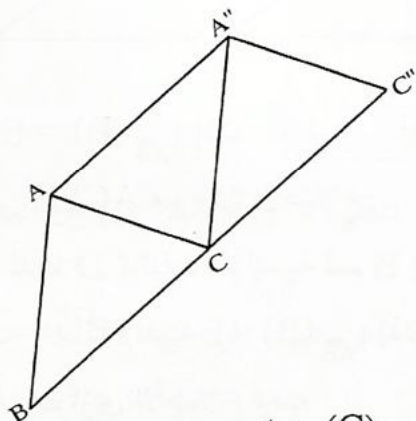


صور المثلث ABC بالإنزاحة t_{AB} هي المثلث $B'B'C'$.

لدينا $t_{BC}(B) = C$

$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BC}$ يعني $t_{BC}(A) = A''$

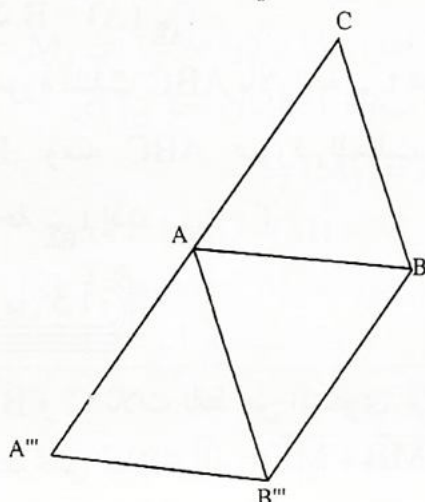
$\overrightarrow{CC''} = \overrightarrow{BC}$ يعني $t_{BC}(C) = C''$



لدينا $t_{BC}(C) = A$

$\overrightarrow{AA'''} = \overrightarrow{CA}$ يعني $t_{CA}(A) = A'''$

$\overrightarrow{BB'''} = \overrightarrow{CA}$ يعني $t_{CA}(B) = B'''$



أي $S_I(M_1) = M_2$ و $S_A(M) = M_1$

و $S_B(M_2) = M'$

إذن $S_B \circ S_I \circ S_A(M) = M'$

لدينا $S_A(M) = M_1$ إذن $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM_1}$ (1)

لدينا $S_B(M_2) = M'$ إذن $\overrightarrow{M_2B} = \overrightarrow{BM'}$ (2)

كذلك $S_A(M_1) = M_2$ يعني أن I منتصف

$[M_1M_2]$ ولدينا I منتصف $[AB]$.

إذن قطرا الرباعي AM_1BM_2 لهما نفس

المنتصف I ومنه AM_1BM_2 متوازي الأضلاع

وبالتالي $\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{M_2B}$ (3) من العلاقات (1)

و (2) و (3) فإن $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM'}$

أي $MAM'B$ أن متوازي الأضلاع وبالتالي

فإن قطراه لهما نفس المنتصف وحيث I منتصف

$[AB]$ فإن I منتصف $[MM']$ وهذا يعني أن

$S_I(M) = M'$ وحيث أن

$M \in (P)$ لكل $S_B \circ S_I \circ S_A(M) = M'$

فإن $S_B \circ S_I \circ S_A = S_I$

تمرين 11:

ABC مثلث أنشئ صور هذا المثلث بالإنزاحات

t_{AB} و t_{BC} و t_{CA} .

الجواب:

لدينا $t_{AB}(A) = B$

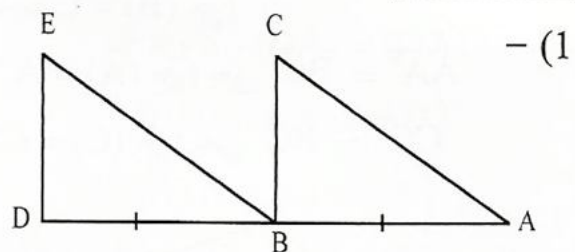
$BB' = \overrightarrow{AB}$ يعني $t_{AB}(B) = B'$

$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$ يعني $t_{AB}(C) = C'$

تمرين 12:

ABC مثلثا و D ماثلة A بالنسبة للنقطة B و E صورة النقطة B بالإزاحة t_{AB} .
(1) - أنشئ الشكل.
(2) - بين أن المثلث ABC هو صورة المثلث BDE بإزاحة T يتم تحديد متجهتها.

الجواب:



(1) لدينا $t_{AB}(B) = E$ إذن $\vec{AC} = \vec{BE}$ ومنه الرباعي ACEB متوازي الأضلاع.
(2) لدينا D ماثلة A بالنسبة لـ B إذن $\vec{BD} = \vec{AB}$ لدينا $t_{AB}(B) = E$ إذن الرباعي ACE متوازي الأضلاع ومنه : $\vec{CE} = \vec{AB}$

إذن $t_{AB}(C) = E$ و $t_{AB}(B) = D$ وبما أن $t_{AB}(A) = B$

فإن صورة المثلث ABC بالإزاحة t_{AB} هو المثلث BDE. ومنه ABC صورة للمثلث BDE بالإزاحة t_{BA} إذن $T = t_{BA}$

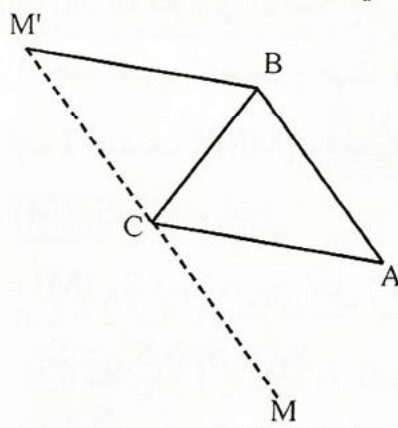
تمرين 13:

A و B و C ثلاث نقط من المستوى (P).
M نقطة تحقق العلاقة : $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$

(1) - بين أن M صورة النقطة A بالإزاحة $\vec{BC}$
(2) - أ - أنشئ الشكل.
ب - أنشئ النقطة M' صورة النقطة B بالإزاحة t_{AC} وبين أن C منتصف [MM'].

الجواب:

(1) لدينا $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$
أي أن : $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB}$
إذن $\vec{MA} + \vec{BC} = \vec{0}$ ومنه $\vec{AM} = \vec{BC}$
أي أن : $t_{BC}(A) = M$
(2) أ - لدينا $\vec{AM} = \vec{BC}$
إذن الرباعي BCMA متوازي الأضلاع.



ب - لدينا $t_{BC}(A) = M$
أي أن $\vec{AC} = \vec{BM'}$

إذن الرباعي ACM'B متوازي الأضلاع.
ب - لدينا BCMA متوازي الأضلاع إذن :

$$(1) \vec{MC} = \vec{AB}$$

لدينا ACM'B متوازي الأضلاع إذن :

$$(2) \vec{CM'} = \vec{AB}$$

من (1) و (2) نستنتج أن $\vec{MC} = \vec{CM'}$
إذن C منتصف القطعة [MM'].

تمرين 14:

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى (P).
نربط كل نقطة M من المستوى بالنقطة M' بحيث :
 $2\vec{MA} + 3\vec{AB} = 2\vec{M'A} = \vec{0}$
بين أن التطبيق f الذي يحول كل نقطة M بالنقطة M' هو إزاحة حدد متجهتها.

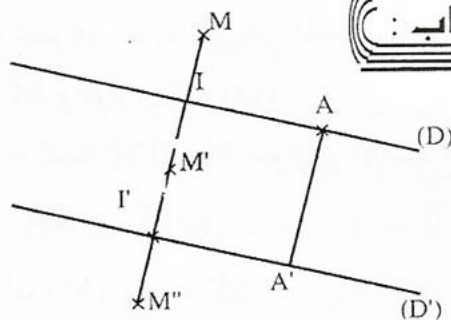
الجواب :

f(M) = M' يعني
 $2\vec{MA} + 3\vec{AB} = 2\vec{M'A} = \vec{0}$
يعني $2\vec{MA} + 2\vec{AM'} + 3\vec{AB} = \vec{0}$
 $2\vec{MM'} = -3\vec{AB}$ يعني
 $\vec{MM'} = -\frac{3}{2}\vec{AB}$ يعني
إذن f إزاحة متجهتها $\frac{3}{2}\vec{AB}$
أي $f = t_{\frac{3}{2}\vec{AB}}$

تمرين 15:

لتكن (D) و (D') مستقيمين متوازيين. نعتبر نقطة A من (D) و A' نقطة من (D') يكون المستقيم (AA') عمودي على المستقيم (D).
(D) ليكون S(D) التمثال المحوري الذي محوره (D).
(D') و هو التمثال المحوري الذي محوره (D').
أثبت أن : $S(D') \circ S(D) = t_{2\vec{AA'}}$

الجواب :



لتكن $M \in (P)$

M' صورة M بالتمثال المحوري $S_{(D)}$

أي $S_{(D)}(M) = M'$

M'' صورة M' بالتمثال المحوري $S_{(D')}$

أي $S_{(D')}(M') = M''$

إذن $S_{(D')} \circ S_{(D)}(M) = M''$

لدينا $\vec{MM''} = \vec{MI} + \vec{II'} + \vec{I'M''}$

$= \vec{IM'} + \vec{II'} + \vec{M'I'}$

$= \vec{II'} + \vec{II'} = 2\vec{II'}$

$\vec{II'} = \vec{AA'}$ مستطيل إذن IAA'I'

ومنه $2\vec{AA'} = \vec{MM''}$ أي

$t_{2\vec{AA'}}(M) = M''$

وبالتالي $S_{(D')} \circ S_{(D)} = t_{2\vec{AA'}}$

تمرين 16:

(1) - لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين بين أن :

$$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$$

(2) - ماهي طبيعة الرباعي ABCD علما أن :

$$t_{\vec{BD}} \circ t_{\vec{AB}} = t_{\vec{BC}}$$

الجواب :

(1) - لتكن M نقطة من المستوى.

M₁ صورة M بالإزاحة $t_{\vec{v}}$ أي $t_{\vec{v}}(M) = M_1$

M₂ صورة M₁ بالإزاحة $t_{\vec{u}}$ أي

$$t_{\vec{u}}(M_1) = M_2$$

إذن $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}(M) = M_2$ (1)

وهذا يعني أن $t_{\vec{u}+\vec{v}}(M) = M_2$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$$

(2) - لدينا $t_{\vec{BD}} \circ t_{\vec{AB}} = t_{\vec{BC}}$



تمرين 18:

A و B نقطتان.

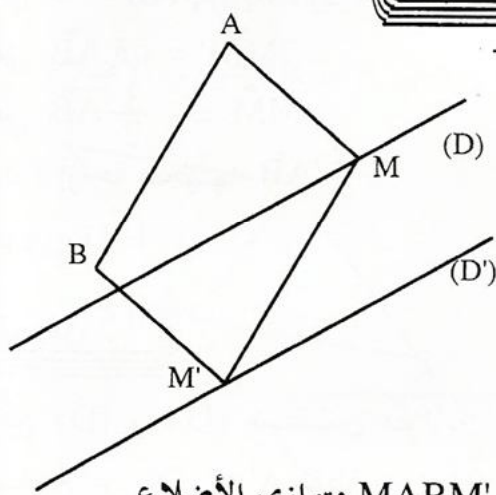
(1) - (D) مستقيم معلوم و M نقطة تتغير عليه ماهي مجموعة النقط M' بحيث يكون الرباعي MABM' متوازي الأضلاع ؟

(2) - (E) دائرة معلومة و M نقطة تتغير عليها.

ماهي مجموعة النقط M' حيث MABM' متوازي الأضلاع ؟

الجواب :

(1) -



لدينا MABM' متوازي الأضلاع

إذن $\vec{MM'} = \vec{BA}$ أي أن $M' = t_{\vec{AB}}(M)$

إذن M' صورة M بالإزاحة $t_{\vec{AB}}$

وبما أن M تتغير على المستقيم (D) فإن M' تتغير على المستقيم (D')

تتغير على المستقيم (D') صورة (D) بالإزاحة $t_{\vec{AB}}$.

إذن مجموعة النقط M' هي المستقيم (D')

من M' والموازي لـ (D)

(2) - لدينا MABM' متوازي الأضلاع

إذن $\vec{MM'} = \vec{AB}$

أي أن $M' = t_{\vec{AB}}(M)$

$$\vec{t}_{\vec{BD}} + \vec{AB} = \vec{t}_{\vec{BC}} \text{ يعني}$$

$$\vec{BD} + \vec{AB} = \vec{BC} \text{ يعني}$$

$$\vec{AD} = \vec{BC} \text{ يعني}$$

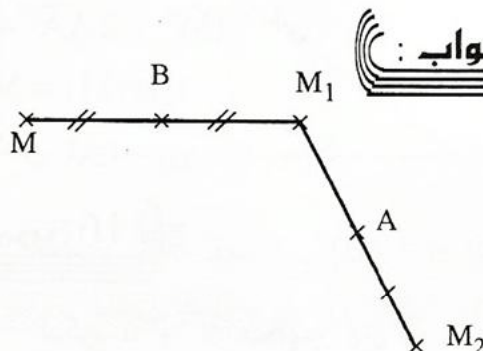
وهذا يعني أن ABCD متوازي الأضلاع.

تمرين 17:

نعتبر الشاثلين المركزين S_B و S_A .

أثبت $S_A \circ S_B$ هو الإزاحة ذات المتجهة $-2\vec{AB}$.

الجواب :



لتكن $M \in (P)$

ولتكن M_1 صورة M بـ S_B

أي $S_B(M) = M_1$

M_2 صورة M_1 بـ S_A

أي $S_A(M_1) = M_2$

ومنه $S_A \circ S_B(M) = M_2$

$$\vec{MM_2} = \vec{MB} + \vec{BA} + \vec{AM_2}$$

$$= \vec{BM_1} + \vec{BA} + \vec{M_1A}$$

$$= \vec{BA} + \vec{BA}$$

$$= 2\vec{BA}$$

$$\vec{MM_2} = -2\vec{BA} \text{ ومنه}$$

$$t_{-2\vec{AB}}(M) = M_2 \text{ وهذا يعني}$$

$$S_A \circ S_B = t_{-2\vec{AB}} \text{ وبالتالي}$$

$$(2) \quad \vec{N'A} - \vec{N'B} + 5\vec{NN'} = \vec{0}$$

من (1) - (2) نستنتج أن

$$\vec{M'A} - \vec{M'B} + 5\vec{MM'} = \vec{N'A} + \vec{N'B} - 5\vec{NM'} = \vec{0}$$

$$\vec{BA} + 5\vec{MM'} + \vec{BA} - 5\vec{NN'} = \vec{0} \quad \text{يعني}$$

$$5\vec{MN} + 5\vec{NM'} - 5\vec{NM'} - 5\vec{M'N'} = \vec{0} \quad \text{يعني}$$

$$5\vec{MN} - 5\vec{M'N'} \quad \text{يعني}$$

$$\vec{M'N'} = \vec{MN} \quad \text{يعني}$$

إذن f إزاحة

$$(2) \quad f(M) = M' \quad \text{يعني}$$

$$\vec{M'A} - \vec{M'B} + 5\vec{MM'} = \vec{0}$$

$$\vec{BA} + 5\vec{MM'} = \vec{0} \quad \text{يعني}$$

$$\vec{MM'} = -\frac{1}{5}\vec{AB} \quad \text{يعني}$$

$$t_{\perp \vec{AB}}(M) = M' \quad \text{يعني}$$

ومنه $f = t_{\perp \vec{AB}}$ أي f إزاحة متجهتها $\vec{u} = -\frac{1}{5}\vec{AB}$

تمرين 20:

لتكن $(\mathcal{E})$ و $(\mathcal{E}')$ دائرتين متقاطعتين ومتقاطعتين

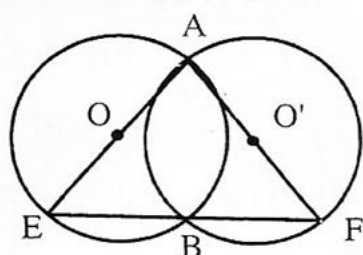
في نقطتين A و B النقطتان E و F متقابلتان قطريا

لنقطة A على كل من الدائرتين $(\mathcal{E})$ و $(\mathcal{E}')$.

1 - أثبت أن النقط B ، E و F مستقيمات.

2 - بين أن B منتصف [EF].

الجواب :



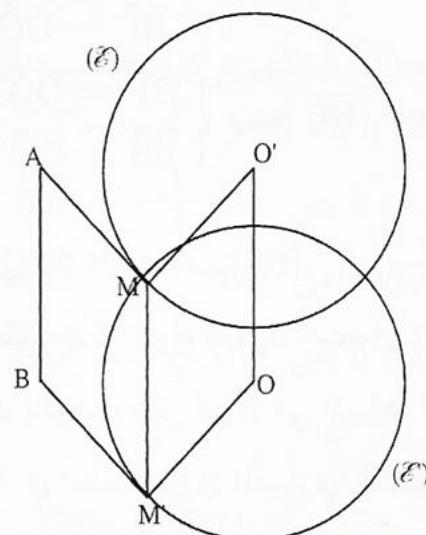
إذن صورة M صورة M بالإزاحة $t_{\perp \vec{AB}}$ بما أن M تتغير

على الدائرة $(\mathcal{E})$ فإن M تتغير على الدائرة

$(\mathcal{E}')$ صورة $(\mathcal{E})$ بالإزاحة $t_{\perp \vec{AB}}$ إذن مجموعة

النقط M هي الدائرة $(\mathcal{E}')$ صورة $(\mathcal{E})$

بالإزاحة $t_{\perp \vec{AB}}$.



تمرين 19:

نعتبر نقطتين مختلفتين A و B من المستوى (P).

لتكن F التطبيق الذي يربط كل نقطة M

بالنقطة M' بحيث :

$$\vec{M'A} - \vec{M'B} + 5\vec{MM'} = \vec{0}$$

1 - باستعمال الخاصية المميزة بين أن f إزاحة.

2 - حدد متجهة الإزاحة f.

الجواب :

(1) - لتكن M و N نقطتين من (P) و M'

و N' صورتيهما بـ f

يعني $f(M) = M'$

$$(1) \quad \vec{M'A} - \vec{M'B} + 5\vec{MM'} = \vec{0}$$

يعني $f(N) = N'$

يعني $t(B) \in (\mathcal{E}') \cap (EF)$

يعني $t(B) \in \{B, F\}$

وحيث أن الإزاحة t لا تقبل نقطة صامدة

لأن $t(B) = F$ فإن $\overrightarrow{OO'} \neq \vec{0}$

أي $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OO'}$

إذن $\begin{cases} \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OO'} \\ \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{OO'} \end{cases}$ ومنه $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BF}$

وبالتالي فإن B منتصف $[EF]$.

ملاحظة : يمكن البرهان دون استعمال الإزاحة وذلك بالبرهان على أن B هي المسقط العمودي لـ A في المثلث AEF المتساوي الساقين ومنه تكون B منتصف $[EF]$.

تمرين 21:

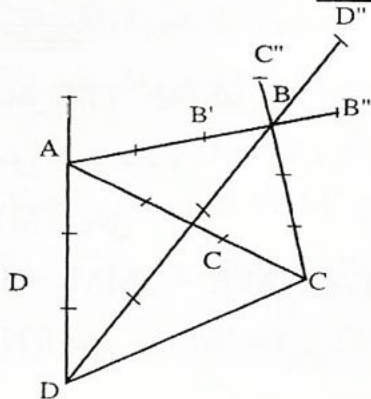
لتكن $ABCD$ رباعيا.

أنشئ صور النقط A و B و C و D

- بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته $\frac{2}{3}$.

- بالتحاكي الذي مركزه B ونسبته $\frac{1}{3}$.

الجواب :



(1) - لدينا $[AE]$ قطر في الدائرة $(\mathcal{E})$ و $B \in (\mathcal{E})$ إذن $\widehat{EBA} = \frac{\pi}{2}$

كذلك $[AF]$ قطر في الدائرة $(\mathcal{E}')$ و $B \in (\mathcal{E}')$ إذن $\widehat{ABF} = \frac{\pi}{2}$ ومنه

$\widehat{EBF} = \widehat{EBA} + \widehat{ABF} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ وبالتالي E, B, F نقط مستقيمة.

(2) - نعتبر المثلث AEF و O منتصف $[AE]$

و O' منتصف $[AF]$ إذن $2\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{EF}$

إذن $EF = 2OO'$ ومنه $EF > OO'$

نعتبر الإزاحة t التي متجهتها $\overrightarrow{OO'}$

لدينا $t(O) = O'$ لأن $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OO'}$ و $t(O) \in (\mathcal{E})$ و $(\mathcal{E}')$ لهما نفس الشعاع إذن :

$t((\mathcal{E})) = (\mathcal{E}')$

ولدينا $E \in (\mathcal{E}) \cap (EF)$ إذن

$t(E) \in t((\mathcal{E})) \cap t((EF))$

يعني $t(E) \in (\mathcal{E}') \cap (EF)$

ملاحظة : $t((EF)) = (EF)$ لأن متجهة الإزاحة t . $\overrightarrow{OO'}$. رجعة لـ (EF)

إذن : $t(E) \in \{B, F\}$

لأن $(\mathcal{E}') \cap (EF) = \{B, F\}$

ومنه $t(E) = B$ أو $t(E) = F$

وبما أن $EF > OO'$ فإن $t(E) = B$

أي $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{OO'}$

كذلك : $B \in (\mathcal{E}) \cap (EF)$

إذن $t(B) \in t((\mathcal{E})) \cap t((EF))$

$$\overrightarrow{CA} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{BA} - (2)$$

$$\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \text{ يعني}$$

$$h = h\left(A, +\frac{2}{3}\right) \text{ حيث } h(B) = C$$

$$k = -\frac{2}{3} \text{ وبالتالي}$$

$$\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AB} \text{ يعني } 3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} - (3)$$

$$h = h\left(A, \frac{2}{3}\right) \text{ حيث } h(B) = C$$

$$k = \frac{3}{2} \text{ وبالتالي}$$

$$\overrightarrow{CA} = -3\overrightarrow{AB} \text{ لدينا } - (4)$$

$$\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} \text{ يعني}$$

$$h = h(A, 3) \text{ حيث } h(B) = C$$

$$k = 3 \text{ وبالتالي}$$

تمرين 23:

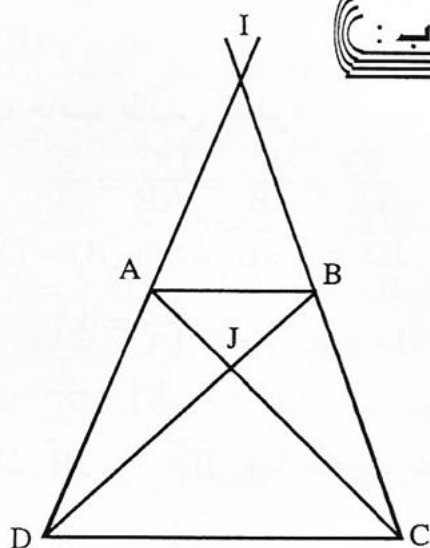
ABCD شبه منحرف حيث :

$$CD = 5 \text{ و } AB = 3 \text{ و } (AB) \parallel (CD)$$

(1) - حدد مركز ونسبة التحاكي h الذي يحول A إلى D و B إلى C .

(2) - حدد مركز ونسبته التحاكي h' الذي يحول A إلى C و B إلى D .

الجواب :



نعتبر التحاكي h بحيث : $h = h\left(A, \frac{2}{3}\right)$

$h(A) = A$ لأن A مركز التحاكي h .

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \text{ يعني } h(B) = B'$$

$$\overrightarrow{AC'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} \text{ يعني } h(C) = C'$$

$$\overrightarrow{AD'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} \text{ يعني } h(D) = D'$$

نعتبر التحاكي h الذي مركزه B ونسبته $-\frac{1}{3}$.

$h(B') = B$ لأن B هو مركز التحاكي

$$\overrightarrow{BA''} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{BA} \text{ يعني } h(A) = A''$$

$$\overrightarrow{BC''} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{BC} \text{ يعني } h(C) = C''$$

$$\overrightarrow{BD''} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{BD} \text{ يعني } h(D) = D''$$

تمرين 22:

حدد في الحالات التالية نسبة التحاكي الذي مركزه A ويحول النقطة B إلى النقطة C في كل حالة :

$$3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} - (1)$$

$$\overrightarrow{CA} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{AB} - (2)$$

$$3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} - (3)$$

$$\overrightarrow{CA} = -3\overrightarrow{AB} - (4)$$

الجواب :

ليكن h تحاكي مركزه A ونسبته k ويحول B إلى C .

$$3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} - (1)$$

$$\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \text{ يعني}$$

$$h = h\left(A, -\frac{2}{3}\right) \text{ حيث } h(B) = C$$

$$k = -\frac{2}{3} \text{ وبالتالي}$$



إذن $h'(J, -\frac{5}{3})$

تمرين 24:

لتكن A و B نقطتين ثابتتين من (P) نعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة M بالنقطة M' بحيث :

$$\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$$

أثبت أن f تحاك مركزه I منتصف [AB] وحدد نسبته.

الجواب :

$$\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \text{ يعني } f(M) = M'$$

$$\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{IB}$$

$$\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IM'} = 6\overrightarrow{MI} \text{ يعني}$$

$$\overrightarrow{IM'} = 6\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MI} \text{ يعني}$$

$$\overrightarrow{IM'} = -5\overrightarrow{MI} \text{ يعني}$$

إذن f هو التحاكي الذي نسبته $k = -5$ ومركزه I منتصف [AB].

تمرين 25:

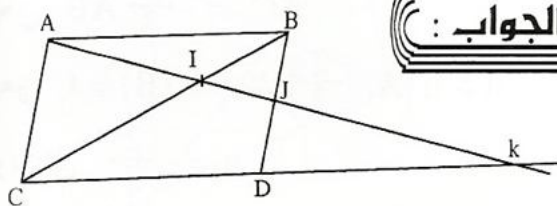
لتكن ABCD متوازي الأضلاع و I نقطة معلومة تنتمي إلى [BD].

لتكن h التحاكي الذي مركزه I ويحول B إلى D.

1 - حدد h(A) و h(J)

2 - أثبت أن $IA^2 = IJ \times IK$.

الجواب :



(1) - نعتبر $h(I, k)$

لدينا $h(A) = D$ و $h(B) = C$

$$\overrightarrow{ID} = k\overrightarrow{IA} \text{ و } \overrightarrow{IC} = k\overrightarrow{IB}$$

إذن النقط I و A و D مستقيمات والنقط I و B و C مستقيمات وبالتالي

$$I \in (BC) \text{ و } I \in (AD)$$

إذن I هي نقطة تقاطع (BC) و (AD)

لدينا حسب خاصية طاليس المباشرة في

المثلث IDC :

$$\frac{ID}{IA} = \frac{IC}{IB} = \frac{DC}{AB} = \frac{5}{3}$$

وبما أن $\overrightarrow{ID} = k\overrightarrow{IA}$ فإن

$$\frac{ID}{IA} = |k|$$

إذن $|k| = \frac{5}{3}$ وبما أن $\overrightarrow{ID}$ و $\overrightarrow{IA}$ لهما نفس المنحى فإن

$$k = \frac{5}{3}$$

إذن $h(I, \frac{5}{3})$

(2) - نعتبر $h'(J, k')$

لدينا $h(A) = C$ و $h(B) = D$

إذن J هي نقطة تقاطع المستقيمين (AC) و (BD)

حسب خاصية طاليس المباشرة

$$\frac{JD}{JA} = \frac{JC}{JB} = \frac{DC}{AB} = \frac{5}{3} \text{ لدينا}$$

لدينا $h(B) = D$ إذن $\overrightarrow{JD} = k'\overrightarrow{JB}$

$$\frac{JD}{JA} = |k'| \text{ إذن}$$

$$|k'| = \frac{5}{3} \text{ أي أن}$$

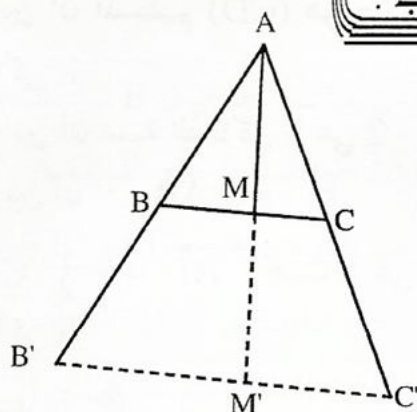
وبما أن $\overrightarrow{JD}$ و $\overrightarrow{JB}$ لهما منحني متعاكسين فإن

$$k' = -\frac{5}{3}$$

تمرين 26:

لتكن ABC مثلث نربط كل نقطة M من القطعة $[BC]$ بنقطة M' حيث M منتصف $[AM']$.
1 - بين أنه يوجد تحاك h حيث $h(M) = M'$ لكل M من القطعة $[BC]$.
2 - استنتج مجموعة النقط M' عندما تتغير M على $[BC]$.

الجواب:



1 - لدينا M منتصف $[AM']$
ومنه $\vec{AM'} = 2\vec{AM}$
أي أن M' صورة M بالتحاكي h الذي مركزه A ونسبته 2.
2 - إذا كانت M تتغير على القطعة $[BC]$ فإن M' تتغير على صورة القطعة $[BC]$ بالتحاكي $h(A, 2)$ أي أن M' تتغير على القطعة $[B'C']$
حيث: $\vec{AB'} = 2\vec{AB}$ و $\vec{AC'} = 2\vec{AC}$
أي أن B منتصف $[AB']$ و C منتصف $[AC']$
إذن مجموعة النقط M' عندما تتغير M على القطعة $[BC]$ هي القطعة $[B'C']$.

لدينا $h(B) = D$

إذن صورة المستقيم (AB) هي المستقيم المار من

D والموازي لـ (AB) أي (DC)

ولدينا $I \in (AI)$ إذن $h((AI)) = (AI)$

لدينا $A \in (AI) \cap (AB)$

إذن $h(A) \in h((AI)) \cap h((AB))$

يعني $h(A) \in h(AI) \cap (DC)$

ولدينا $(AI) \cap (DC) = \{k\}$ وبالتالي

$h(A) = k$ لدينا $h((AI)) = (AI)$

لأن $h \in (AI)$

لدينا $h(B) = D$ إذن صورة (BC) هي المستقيم

المار من D والموازي لـ (BC) أي المستقيم

(AD) .

إذن $h((BC)) = (AD)$

لدينا $J \in (BC) \cap (AD)$

إذن $h(J) \in h((BC) \cap (AI))$

يعني $h(J) \in (AD) \cap (AI)$

لدينا $\{A\} = (AD) \cap (AI)$ ومنه $h(J) = A$

(2) - لدينا $h(A) = k$ يعني $\vec{IA} = k\vec{IA} - k\vec{IA}$ حيث k نسبة التحاكي h .

$h(J) = A$ يعني $\vec{IA} = k\vec{IJ}$

ومنه $IA = |k| IJ$ و $Ik = |k| IA$

إذن $\frac{IA}{IJ} = \frac{Ik}{IA}$ وبالتالي $IA^2 = IJ \times IK$

تمرين 27:

ABCD متوازي الأضلاع I و J

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DC} \text{ و } \overrightarrow{CI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CB}$$

1 - أنشئ الشكل.

2 - بين أن المستقيم (BJ) هو صورة المستقيم (AI) بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

3 - ليكن h التحاكي الذي مركزه I بحيث

$$h(B) = C$$

أ - بين أن المستقيم (CD) هو صورة (AB) بالتحاكي h.

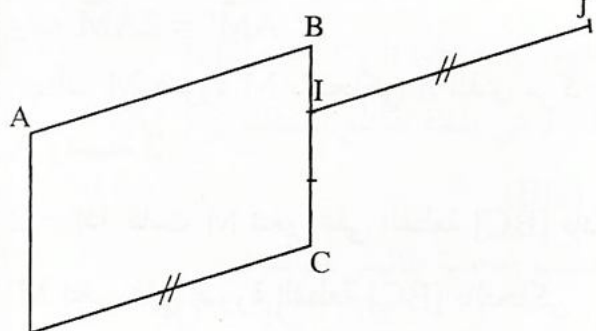
ب - بين أن نسبة التحاكي h هي $k = -2$.

$$\text{ج - بين أن : } \overrightarrow{kI} = 2 \overrightarrow{AB}$$

و $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{Ck}$ حيث k هي صورة J بالتحاكي h.

الجواب :

(1)



(2) - لتكن t الإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{AB}$ لدينا $t(A) = B$ ولدينا : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IJ}$ إذن ABJI

متوازي الأضلاع ومنه (AI) // (BJ)

وحيث أن صورة المستقيم (AI) بالإزاحة t هي مستقيم يوازيه ويمر من B أي (BJ)

ومنه $t((AI)) = (BJ)$

(3) - أ - لدينا $h(B) = C$ ونعلم أن صورة

المستقيم (AB) بالتحاكي h هي مستقيم يمر من

C ويوازي (AB) أي (DC)

ومنه $h((AB)) = (CD)$

ب - لدينا $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CB}$

$$\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CI} + \frac{2}{3} \overrightarrow{IB}$$

$$\overrightarrow{CI} - \frac{2}{3} \overrightarrow{CI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{IB}$$

$$\frac{1}{3} \overrightarrow{CI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{IB}$$

$$\overrightarrow{CI} = 2 \overrightarrow{IB}$$

$$\overrightarrow{IC} = -2 \overrightarrow{IB}$$

إذن التحاكي الذي مركزه I ويحول B إلى C

نسبته $k = -2$

ج - لدينا $h(J) = k$

$$\overrightarrow{Ik} = -2 \overrightarrow{IJ}$$

$$\overrightarrow{Ik} = -2 \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{Ik} = -2 \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{kI} = 2 \overrightarrow{AB}$$

لدينا $h(B) = C$ و $h(J) = k$

إذن حسب الخاصية المميزة للتحاكي

$$\overrightarrow{Ck} = -2 \overrightarrow{BJ}$$

$$\overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{Ck}$$

$$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AI}$$

$$\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{Ck}$$

تمرين 28:

ليكن ABC مثلثا و E النقطة التي تحقق :

$$\overrightarrow{CE} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$$

2 - لدينا $I \in (CI)$ إذن $h((CI)) = (CI)$
و $h(B) = E$ إذن صورة المستقيم (BC) بـ h
هي مستقيم المار من E والموازي لـ (BC) أي
المستقيم (EJ) لدينا $C \in (CB) \cap (CI)$
إذن $h(C) \in h((CB)) \cap h((CI))$
أي $h(C) \in (EJ) \cap (CI) = \{J\}$
وبالتالي $h(C) = J$

تمرين 29:

A و B و C ثلاث نقط حيث B منتصف القطعة $[AC]$.
 (Δ) مستقيم مار من القطعة A وبخالف
 (AB) وغير عمودي على (AB) . B' و C' هما
المسقطان العموديان على التوالي للنقطتين B
و C على (Δ) . I نقطة تقاطع المستقيمين (BC') و
 $(B'C)$ وليكن h التحاكي الذي مركزه I ويجول
بـ C' إلى B .

(1) - حدد $h(B')$ واحسب k نسبة التحاكي h .

(2) - أ - حدد العدد الحقيقي α

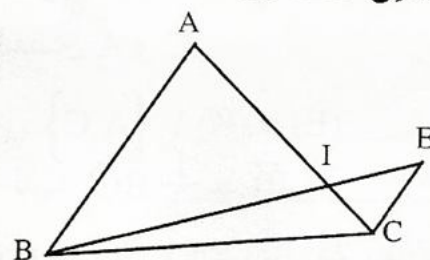
حيث $\vec{BI} = \alpha \vec{BC'}$.

ب - حدد مجموعة النقط (E) للنقطة C' عندما
تتغير على (Δ) .

ج - حدد مجموعة النقط (F) للنقطة I عندما
يتغير (Δ) .

(3) - أنشئ الشكل علما أن $AB = 4 \text{ cm}$.

النقطة I هي تقاطع (BE) و (CA) (أنظر
الشكل) نعتبر التحاكي h الذي مركزه I ويجول
النقطة A إلى النقطة C .



1 - أ - حدد صورة النقطة B بالتحاكي h .

ب - استنتج نسبة التحاكي h .

2 - المستقيم المار من النقطة E والموازي للمستقيم
 (BC) يقطع المستقيم (AI) في النقطة J . بين أن
صورة النقطة C بالتحاكي h هي النقطة J .

الجواب:

(1) - أ - لدينا مركز التحاكي h هو النقطة I

لدينا $I \in (BI)$ ومنه $h((BI)) = (BI)$

لدينا $h(A) = C$ إذن صورة المستقيم (AB)

هي مستقيم يمر من C ويوازي (AB) أي

(EC) ومنه $h((AB)) = (EC)$

لدينا $B \in (BI) \cap (AB)$

إذن $h(B) \in h((BI)) \cap h((AB))$

أي $h(B) \in (BI) \cap (EC)$

وبما أن $h(B) = E$ فإن $(BI) \cap (EC) = \{E\}$

ب - لتكن k نسبة التحاكي h

لدينا $h(A) = C$ و $h(B) = E$ إذن حسب

الخاصية المميزة للتحاكي h هي $\vec{CE} = k \vec{AB}$

ولدينا $\vec{CE} = \frac{1}{3} \vec{AB}$ إذن نسبة التحاكي

h هي $k = \frac{1}{3}$



