

الدورة الأولى
15 ساعة

القدرات المنتظرة

- * استعمال المحسبة العلمية لتحديد قيمة مقربة ازواية محددة بأحد نسبها المثلثية والعكس.
- * التمكن من النسب المثلثية للزوايا الاعتيادية وتطبيق مختلف العلاقات

I- تذكير و اضافات

1- أنشطة للتذكير

تمرين 1

نعتبر الشكل التالي حيث $OA = 4$ و $AB = 3$ و H المسقط العمودي لـ A على (OB) :

1- أحسب OB

2- أ/ أحسب $\cos(\widehat{AOB})$ ثم استنتج قيمة مقربة

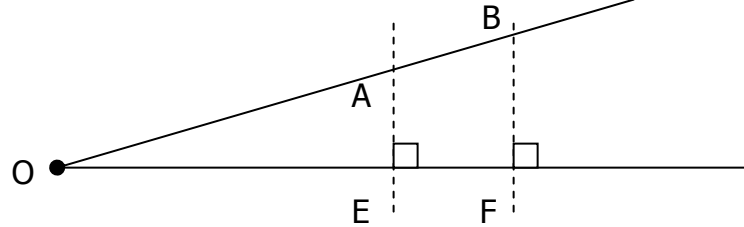
لقياس الزاوية $[\widehat{AOB}]$

ب/ استنتج المسافة OH

3- أحسب $\tan(\widehat{AOB})$ ثم استنتج $\sin(\widehat{AOB})$

تمرين 2

نعتبر الشكل التالي بحيث $AB = 5$ و $EF = 4$



أحسب $\cos(\widehat{AOE})$ ثم استنتج $\sin(\widehat{AOE})$

1- وحدات قياس الزوايا و الاقواس الهندسية - زاوية مركزية

1- أنشطة

لتكن (C) دائرة مركزها O و شعاعها R . نعتبر A و B و C و A' و B' و M نقط من (C) بحيث α قياس للزاوية الهندسية $[\widehat{AOM}]$ بالدرجة

1- اتمم الجدول التالي

الزاوية المركزية	$[\widehat{AOA'}]$	$[\widehat{AOB}]$	$[\widehat{AOC}]$	$[\widehat{AOB'}]$	$[\widehat{AOM}]$
قياس الزاوية المركزية بالدرجة					α°
طول القوس الهندسية المرتبطة بها					l

2- بين أن 180° و 90° و 135° و 270° متناسبة πR و $\frac{\pi}{2}R$ و $\frac{3\pi}{4}R$ و $\frac{3\pi}{2}R$ على التوالي

3- حدد l بدلالة α و π و R

4- لتكن M' نقطة من (C) حيث طول القوس الهندسية $[AM']$ هو R .

حدد β قياس الزاوية المركزية $\widehat{AOM}$ بالدرجة.

2- وحدات قياس الزوايا

لقياس الزوايا هناك ثلاث وحدات هي الدرجة و الغراد و الراديان.

أ/ تعريف الراديان

الراديان هو قياس زاوية مركزية، في دائرة شعاعها R ، تحصر قوسا دائرية طولها R .
نرمز لها بـ rd أو rad

ملاحظة

$$\pi rd = 200gr = 180^\circ \quad (gr : \text{يرمز للغراد})$$

ب/ نتيجة

إذا كان x قياس زاوية بالراديان و y قياسها بالدرجة و z قياسها بالغراد فان $\frac{x}{\pi} = \frac{y}{180} = \frac{z}{200}$

ج/ قياس قوس هندسية

قياس قوس هندسية هو قياس الزاوية المركزية التي تحصره.

د/ طول قوس هندسية

إذا كان α قياس قوس هندسية بالراديان، في دائرة شعاعها R ، فان طول هذه القوس هو αR .

ملاحظة

طول قوس هندسية، في دائرة شعاعها 1 هو قياس الزاوية المركزية التي تحصرها.

تمارين تطبيقية

تمرين 1

اتمّم الجدول التالي

قياس زاوية بالدرجة	90°		45°	30°	0°
قياسها بالراديان			$\frac{\pi}{3}$		

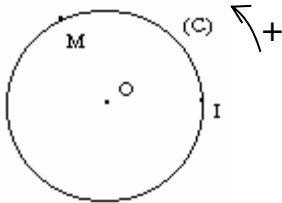
تمرين 2

ليكن ABC مثلثا متساوي الاضلاع حيث $AB = 5cm$ و نعتبر (C) الدائرة التي مركزه A و تمر

من B . أحسب l طول القوس الهندسية المحصورة بالزاوية المركزية $\widehat{BAC}$

II- الدائرة المثلثية

1- توجيه دائرة - توجيه مستوى

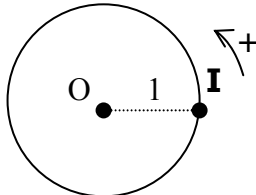


لتكن (C) دائرة مركزها O و شعاعها R و I نقطة من (C) .
لو أردنا أن ننطلق من I لنحيط حول (C) ، لوجدنا أنفسنا أمام منحنين.
توجيه الدائرة (C) هو اختيار أحد المنحنين منحى موجبا (أو مباشرا) و الآخر منحى سالبا (أو غير مباشر).
عادة نأخذ المنحى الموجب المنحى المعاكس لحركة عقارب الساعة.
النقطة I تسمى أصل الدائرة (C) .

عندما توجه جميع دوائر المستوى توجيهها موحدا فإننا نقول إن المستوى موجه.

2- الدائرة المثلثية

تعريف الدائرة المثلثية هي دائرة شعاعها 1 مزودة بنقطة أصل و موجهة توجيهها موجبا.



III- الأفاصل المنحنية.

1- الأفاصل المنحني الرئيسي لنقطة على الدائرة المثلثية

لتكن (C) دائرة مثلثية أصلها I . نعتبر المجال $]-\pi; \pi]$ حيث 0 أفصول I في المحور العمودي

على (OI) . حدد محيط الدائرة وشعاع الدائرة.

إذا لفنا القطعة الممثلة للمجال $]-\pi; \pi]$ على الدائرة (C) نلاحظ أن كل عدد α من $]-\pi; \pi]$ ينطبق

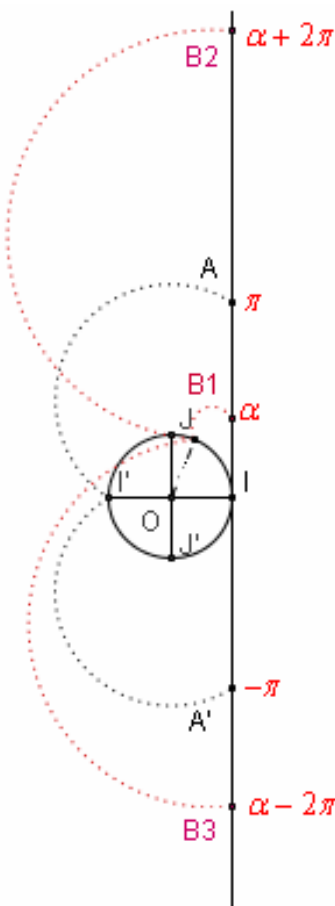
مع نقطة وحيدة M من (C) و كل نقطة M من (C) تمثل عدد وحيد α من $]-\pi; \pi]$

كل نقطة M من (C) تمثل عدد وحيد α من $]-\pi; \pi]$ و كل عدد α من $]-\pi; \pi]$ يمثل نقطة وحيدة M من (C) .
العدد α يسمى الافصول المنحني الرئيسي لـ M

على دائرة مثلثية (C) أصلها I. أنشئ النقط A و B و C و D و E و F و G و H التي إفاصلها المنحنى الرئيسية هي $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{3\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{6}$ و $-\frac{\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{3\pi}{4}$ على التوالي

كل هذه الأعداد تسمى الأفاصيل المنحنية لنقطة M
 نلاحظ أن هذه الأعداد تكتب بشكل عام على شكل $\alpha + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

أفصولها المنحني الرئيسي
كل عدد يكتب على الشكل $\alpha + 2k\pi$ بحيث k عنصر من $\mathbb{Z}$
يسمى أفصولا منحنيًا للنقطة M .



تمرين حدد الأفصول المنحنية للنقطتين A و B ذات الأفصولين المنحنيين الرئيسيين $\frac{\pi}{5}$ و $-\frac{2\pi}{3}$

على التوالي

تمرين (C) دائرة مثلثية أصلها I .

نعتبر $\frac{34\pi}{3}$ أفصول منحني لنقطة M . أنشئ M

ب- خاصيات

لتكن M نقطة من دائرة مثلثية (C) أصلها I. و ليكن α أفصولها المنحني الرئيسي بين اذا كان x و y أفصولين منحنيين للنقطة M فانه يوجد عنصر λ من $\mathbb{Z}$ بحيث $x - y = 2\lambda\pi$

خاصة - إذا كان x و y أفصولين منحنيين للنقطة M فانه يوجد عنصر λ من $\mathbb{Z}$ بحيث $x - y = 2\lambda\pi$ و نكتب $[2\pi]$ $x \equiv y$ و نقرأ x يساوي y بترديد 2π .

- إذا كان x أفصول منحني للنقطة M فان جميع الأفصول المنحنية للنقطة M تكتب على شكل $x + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

تمرين حدد الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة التي إحدى أفصولها المنحنية $\alpha = \frac{-227\pi}{6}$

تمرين مثل على الدائرة المثلثية النقط $A; B; C$ التي أفصولها المنحنية على التوالي هي

$$7\pi; \frac{37\pi}{3}; \frac{-108\pi}{12}$$

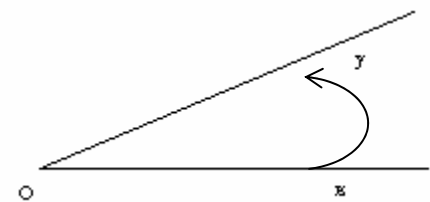
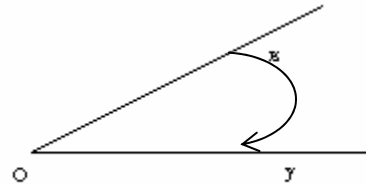
تمرين أنشئ على الدائرة المثلثية النقط M_k التي أفصولها المنحنية $-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

IV- الزوايا الموجهة

4- الزاوية الموجهة لنصفي مستقيم

أ- تعريف

في المستوى الموجه نعتبر $[O; x]$ و $[O; y]$ نصفي مستقيم لهما نفس الأصل الزوج $([O; x]; [O; y])$ يحدد زاوية موجهة لنصفي مستقيم و يرمز لها بالرمز $(\overline{Ox}; \overline{Oy})$



ب- قياسات زاوية موجهة لنصفي مستقيم

تعريف وخاصة

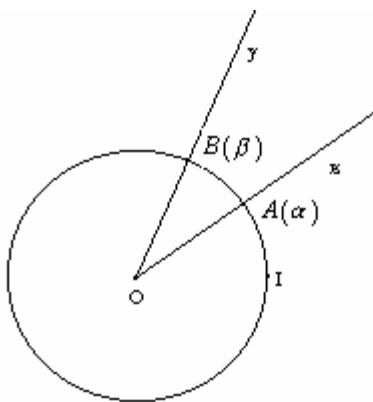
لتكن $(\overline{Ox}; \overline{Oy})$ زاوية موجهة لنصفي مستقيم ، و (C) دائرة مثلثية مركزها O ، A و B نقطتي تقاطع (C) و نصفي

مستقيم $[O; x]$ و $[O; y]$ على التوالي

ليكن α و β أفصولين منحنيين للنقطتين A و B على التوالي . العدد $\beta - \alpha$ يسمى قياسا للزاوية الموجهة $(\overline{Ox}; \overline{Oy})$.

كل عدد حقيقي يكتب على الشكل $\beta - \alpha + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

يسمى قياسا للزاوية الموجهة $(\overline{Ox}; \overline{Oy})$.



نرمز لقياسات الزاوية $(\overline{Ox}; \overline{Oy})$ بالرمز $(\overline{Ox}; \overline{Oy})$ نكتب $k \in \mathbb{Z}$ $(\overline{Ox}; \overline{Oy}) = \beta - \alpha + 2k\pi$

و نكتب أيضا $[2\pi]$ $(\overline{Ox}; \overline{Oy}) \equiv \beta - \alpha$

خاصة و تعريف

لكل زاوية موجهة لنصفي مستقيم قياس وحيد ينتمي إلى المجال $]-\pi; \pi]$ يسمى القياس الرئيسي لهذه الزاوية الموجهة.

خاصة

إذا كان θ قياس للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{Oy})$ فإن $\theta + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ قياس للزاوية $(\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{Oy})$.
إذا كان α و β قياسين للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{Oy})$ فإن $\alpha - \beta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ أي $(k \in \mathbb{Z} / \alpha - \beta = 2k\pi)$

ملاحظات

* إذا كانت M نقطة من دائرة مثلثية أصلها I و مركزها O فإن الأفاصل المنحنية للنقطة M هي قياسات الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$ و أن الافصول المنحني الرئيسي لـ M هو القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$

* القيمة المطلقة للقياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{Oy})$ هي قياس الزاوية الهندسية $(\widehat{xOy})$.

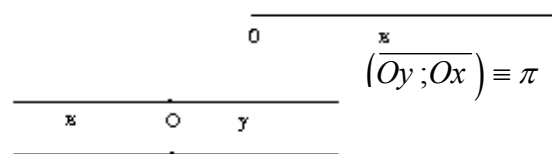
بعض الزوايا الخاصة

الزاوية المنعدمة

$$(\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{Ox}) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

الزاوية المستقيمة

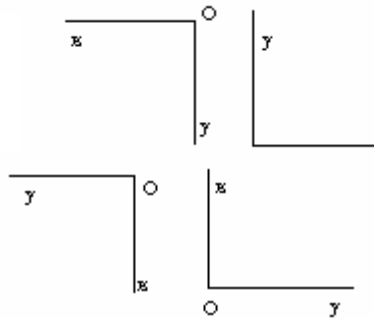
$$(\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{Oy}) \equiv \pi \pmod{2\pi} \quad (\overrightarrow{Oy}; \overrightarrow{Ox}) \equiv \pi \pmod{2\pi}$$



الزاوية القائمة

$$(\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{Oy}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

الزاوية $(\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{Oy})$ زاوية قائمة موجبة



$$(\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{Oy}) \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

الزاوية $(\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{Oy})$ زاوية قائمة سالبة.

تمرين

- بين أن القياسات التالية تمثل قياسات نفس الزاوية $\frac{601\pi}{6}$; $\frac{-143\pi}{6}$; $\frac{25\pi}{6}$
- ما هو القياس الرئيسي لزاوية موجهة قياسها أحد القياسات 47π ; -36π ; $\frac{52\pi}{5}$; $-\frac{25\pi}{3}$
- أنشئ زاوية موجهة $(\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{Oy})$ قياسها $-\frac{234\pi}{5}$.

تمرين

أنشئ ABC مثلث متساوي الأضلاع حيث $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$

ج- علاقة شال ونتائجها

علاقة شال

إذا كانت $[O; x]$ و $[O; y]$ و $[O; z]$ ثلاثة أنصاف مستقيم لها نفس الأصل فإن

$$(\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{Oy}) + (\overrightarrow{Oy}; \overrightarrow{Oz}) \equiv (\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{Oz}) \pmod{2\pi}$$

نتائج

* إذا كان $[O; x]$ و $[O; y]$ نصفي مستقيم فإن $(\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{Oy}) \equiv -(\overrightarrow{Oy}; \overrightarrow{Ox}) \pmod{2\pi}$

* إذا كانت $[O; x]$ و $[O; y]$ و $[O; z]$ ثلاثة أنصاف مستقيم تحقق $(\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{Oy}) \equiv (\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{Oz}) \pmod{2\pi}$ فإن $[O; y]$ و $[O; x]$ نصفي مستقيم منطبقان.

و هذا يعني أنه إذا كان $[Ox]$ نصف مستقيم و α عددا حقيقيا فانه يوجد نصف مستقيم وحيد

$$[O; y] \text{ بحيث } [2\pi] \quad (\overline{Ox; Oy}) \equiv \alpha$$

د- زاوية زوج متجهتين غير منعدمتين

تعريف

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من المستوى الموجه و $[O; x]$ و $[O; y]$ نصفي مستقيم موجهين على التوالي بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

زاوية زوج المتجهتين $(\vec{u}; \vec{v})$ هي الزاوية الموجهة $(\overline{Ox; Oy})$ و يرمز لها بالرمز $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$.

ملاحظة

مجموعة قياسات الزاوية $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$ هي مجموعة قياسات

الزاوية $(\overline{Ox; Oy})$.

علاقة شال ونائجها

علاقة شال

إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاثة متجهات غير منعدمة فان

$$(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}; \vec{w}}) \equiv (\widehat{\vec{u}; \vec{w}}) \quad [2\pi]$$

نتائج

* إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين فان $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) \equiv -(\widehat{\vec{v}; \vec{u}}) \quad [2\pi]$

* إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاثة متجهات غير منعدمة تحقق $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) \equiv (\widehat{\vec{u}; \vec{w}}) \quad [2\pi]$

فان $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستقيمتين ولهما نفس المنحى.

تمرين

لتكن (C) دائرة مثلثية مركزها O وأصلها I . نعتبر على (C) النقط التالية المعرفة بأفاصلها

$$\text{المنحنية} \quad A(\pi) \quad B\left(\frac{3\pi}{2}\right) \quad E\left(\frac{23\pi}{4}\right) \quad F\left(\frac{-17\pi}{3}\right)$$

أعط قياسا لكل من الزوايا التالية ، ثم حدد القياس الرئيسي لكل منهن

$$(\widehat{\vec{OA}; \vec{OA}}) ; (\widehat{\vec{OB}; \vec{OA}}) ; (\widehat{\vec{OI}; \vec{OE}}) ; (\widehat{\vec{OE}; \vec{OF}})$$

V - النسب المثلثية

1- المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بالدائرة المثلثية

لتكن (C) دائرة مثلثية مركزها O وأصلها I .

ولتكن J من (C) بحيث $(\widehat{\vec{OI}; \vec{OJ}})$ زاوية قائمة موجبة

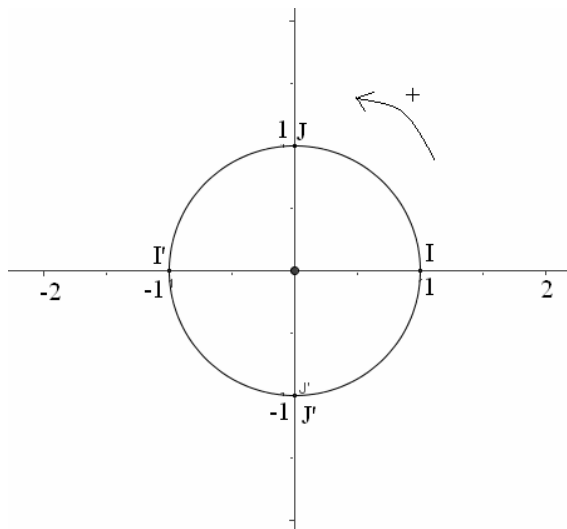
المعلم $(\vec{O}; \vec{OI}; \vec{OJ})$ يسمى المعلم المتعامد الممنظم

المباشر المرتبط بالدائرة المثلثية (C) .

لتكن J' من (C) بحيث $(\widehat{\vec{OI}; \vec{OJ}'})$ زاوية قائمة سالبة.

المعلم $(\vec{O}; \vec{OI}; \vec{OJ}')$ يسمى المعلم المتعامد الممنظم

الغير المباشر المرتبط بالدائرة المثلثية (C) .



2- النسب المثلثية

1-2 تعاريف

لتكن (C) دائرة مثلثية و $(O; \overline{OI}; \overline{OJ})$ المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بها. لتكن M نقطة من (C) و x أفضولا منحنيها لها. نعتبر C المسقط العمودي لـ M على (OI) و S المسقط العمودي لـ M على (OJ)

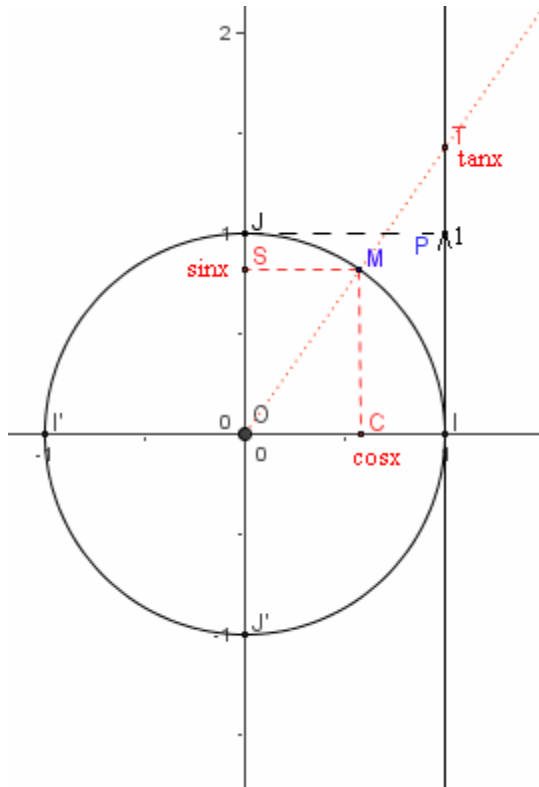
*- العدد الحقيقي أفضول النقطة M في المعلم $(O; \overline{OI}; \overline{OJ})$ يسمى جيب تمام العدد الحقيقي x نرمز له بـ $\cos x$

*- العدد الحقيقي أرتوب النقطة M في المعلم $(O; \overline{OI}; \overline{OJ})$ يسمى جيب العدد الحقيقي x نرمز له بـ $\sin x$

*- ليكن Δ المماس لـ (C) عند I والنقطة $P(1;1)$. لتكن T نقطة تقاطع (OM) و Δ أي

$$k \in \mathbb{Z} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

العدد الحقيقي أفضول T في المعلم $(I; P)$ يسمى ظل العدد الحقيقي x نرمز له بـ $\tan x$.



ملاحظة و اصطلاحات

- إذا كان x أفضول منحنى لنقطة M فان $M(\cos x; \sin x)$

تسمى دالة جيب التمام $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ يرمز لها بـ $\cos$

تسمى دالة الجيب $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ يرمز لها بـ $\sin$

تسمى دالة الظل $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ يرمز لها بـ $\tan$

2-2- خاصيات

*- كيفما كان وضع M نقطة من (C) أفضولها منحنى x النقطة C تنتمي الى القطعة $[II']$ و S تنتمي الى $[JJ']$ حيث $J(0;1)$; $J'(0;-1)$; $I'(-1;0)$; $I(1;0)$

لكل $x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \quad -1 \leq \cos x \leq 1$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{لكل } x \in \mathbb{R}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{لكل } x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

*- نعلم أن جميع الأعداد الحقيقية التي تكتب $x + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ، أفاصيل منحنية لنفس النقطة M

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad ; \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad \text{لكل } x \in \mathbb{R}$$

- مهما كانت $M(x + k\pi)$ لدينا أفضول T هو $\tan x$

$$\tan(x + k\pi) = \tan x \quad \text{لكل } x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\tan(x + \pi) = \tan x \quad \text{لكل } x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

حالة خاصة

*- بتوظيف الدائرة المثلثية نحصل على

$$\begin{aligned} & \text{لكل } x \in \mathbb{R} \quad \cos(-x) = \cos x \quad ; \quad \sin(-x) = -\sin x \quad \rightarrow \\ & \text{نعبر عن هذا بقولنا ان الدالة } \cos \text{ زوجية و أن الدالة } \sin \text{ فردية.} \\ & \text{لكل } x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan(-x) = -\tan x \quad \rightarrow \end{aligned}$$

نعبر عن هذا بقولنا ان الدالة $\tan$ فردية.

$$\begin{aligned} & \text{لكل } x \in \mathbb{R} \quad \sin(\pi - x) = \sin x \quad ; \quad \cos(\pi - x) = -\cos x \quad \rightarrow \\ & \text{لكل } x \in \mathbb{R} \quad \sin(\pi + x) = -\sin x \quad ; \quad \cos(\pi + x) = -\cos x \quad \rightarrow \\ & \text{لكل } x \in \mathbb{R} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \rightarrow \\ & \text{لكل } x \in \mathbb{R} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \quad ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \quad \rightarrow \end{aligned}$$

2-3- نسب مثلثية اعتيادية

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tanx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

تمارين

تمرين 1 أحسب $\cos \frac{34\pi}{3}$; $\cos \frac{-37\pi}{4}$; $\sin \frac{53\pi}{6}$; $\sin \frac{-7\pi}{2}$

تمرين 2 أ- حدد $1 + \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{2\pi}{6} + \dots + \cos \frac{11\pi}{6}$

ب- بسط $\sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{27\pi}{2} - x\right) + \sin(3\pi + x) - \cos(7\pi - x)$