

تمارين وحلولها

تمرين 1 :

لتكن A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمة من المستوى (P).

1- أنشئ النقطة M بحيث : $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$

2- أنشئ النقطة N بحيث : $\vec{AN} = \vec{AB} - \vec{AC}$

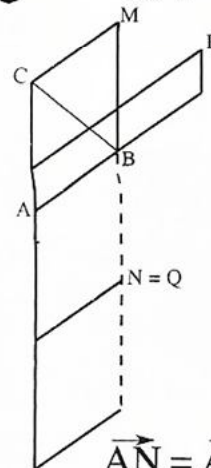
3- أنشئ النقطة P بحيث : $\vec{AP} = 2\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$

4- أنشئ النقطة Q بحيث : $\vec{CQ} = \vec{AB} - 2\vec{AC}$

الجواب :

1- لدينا : $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$

يعني ABMC متوازي الأضلاع .



2- $\vec{AN} = \vec{AB} - \vec{AC}$

يعني $\vec{AN} = \vec{CA} + \vec{AB}$

يعني $\vec{AN} = \vec{CB}$

يعني ANBC متوازي الأضلاع .

3- لإنشاء النقطة P ننشئ المتجهة

$2\vec{AB}$ والمتجهة $\frac{1}{3}\vec{AC}$ إنطلاقا من A ثم

نتمم متوازي الأضلاع .

4- $\vec{CQ} = \vec{AB} - 2\vec{AC}$

يعني $\vec{CQ} = \vec{AB} - \vec{AC} - \vec{AC}$

يعني $\vec{AC} + \vec{CQ} = \vec{AB} + \vec{CA}$

يعني $\vec{AQ} = \vec{CB}$

يعني CBQA متوازي الأضلاع

و حسب (2) لدينا $\vec{CB} = \vec{AN}$

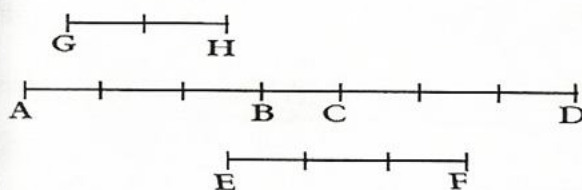
إذن $\vec{AN} = \vec{AQ}$

إذن Q = N

تمرين 2 :

نعتبر النقط A و B و C و D و E و F و G و H

و H من المستوى (P) (انظر الشكل)



- حدد المتجهات $\vec{DA}$ و $\vec{BD}$ ، $\vec{CB}$ ، $\vec{AD}$ ، $\vec{AC}$ و $\vec{EF}$ و $\vec{HG}$ بدلالة المتجهة و $\vec{AB}$.

الجواب :

* لدينا :

$$\vec{AC} = \frac{4}{3} \vec{AB}$$

$$\vec{AD} = \frac{7}{3} \vec{AB}$$

$$\vec{CB} = -\frac{1}{3} \vec{AB}$$

$$\vec{BD} = \frac{4}{3} \vec{AB}$$

$$\vec{DA} = -\frac{7}{3} \vec{AB}$$

$$\vec{EB} = \vec{BA} \text{ و } \vec{ED} = 2\vec{BC}$$

1 - أنشئ النقطتين D و E.

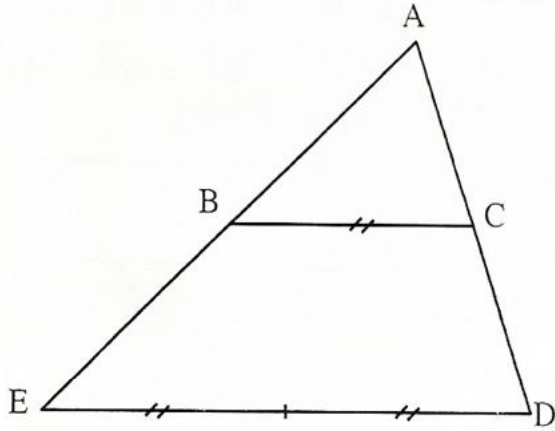
2 - بين أن النقطة C منتصف القطعة [AD].

الجواب :

1 - لدينا : $\vec{EB} = \vec{BA}$ يعني أن B منتصف

[EA].

ننشئ أولا E.



2 - لدينا :

$$\vec{CA} + \vec{CD} = \vec{CB} + \vec{BA} + \vec{CB} + \vec{BE} + \vec{ED}$$

$$= 2\vec{CB} + \vec{BA} + \vec{AB} + 2\vec{BC}$$

$$\vec{CA} + \vec{CD} = \vec{0} \text{ إذن :}$$

وهذا يعني أن C منتصف [AD].

تمرين 5 :

A. B و C ثلاث نقط غير مستقيمة في المستوى

(P) أنشئ النقطتين I و J بحيث :

$$3\vec{IA} - \vec{AB} = \vec{IB} + 2\vec{AB}$$

$$\vec{BJ} - \vec{AB} = \vec{AC}$$

$$\vec{EF} = \vec{AB}$$

$$\vec{HG} = -\frac{2}{3}\vec{AB}$$

تمرين 3 :

ABC مثلث في المستوى (P).

1 - أنشئ النقطة M بحيث : $\vec{BM} = -2\vec{AC}$

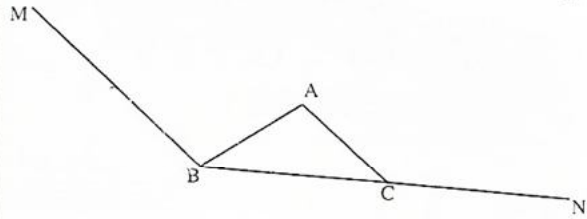
2 - أنشئ النقطة N بحيث :

$$\vec{AN} = -\vec{AB} + 2\vec{AC}$$

3 - بين أن A منتصف القطعة [MN].

الجواب :

1 -



$$\vec{AN} = -\vec{AB} + 2\vec{AC} \text{ لدينا}$$

$$\vec{AN} - \vec{AC} = \vec{BA} + \vec{AC}$$

$$\vec{CN} = \vec{BC} \text{ يعني}$$

يعني C منتصف [BN].

3 - لدينا

$$\vec{AM} + \vec{AN} = \vec{AB} + \vec{BM} - \vec{AB} + 2\vec{AC}$$

$$= -2\vec{AC} + 2\vec{AC}$$

$$\vec{BM} + \vec{AN} = \vec{0} \text{ إذن :}$$

وبالتالي A منتصف [MN].

تمرين 4 :

ABC مثلث في المستوى (P).

نعتبر النقطتين D و E حيث :

$$\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ} \quad 1 - \text{لدينا}$$

$$- \frac{1}{2} \vec{BA} + \frac{1}{2} \vec{AC}$$

$$\vec{IJ} - \frac{1}{2} \vec{BC} \quad \text{إذن}$$

$$\vec{IJ} - \frac{1}{2} \vec{BC} \quad 2 - \text{لدينا}$$

$$\vec{BK} - \frac{1}{2} \vec{BC} \quad \text{و K منتصف [BC] إذن}$$

$$\vec{IJ} = \vec{BK} \quad \text{إذن}$$

ومنه IJKB متوازي الأضلاع.

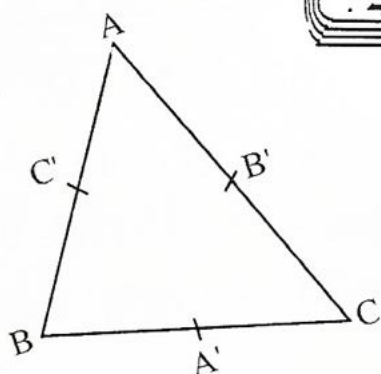
تمرين 7:

ABC مثلث A' و B' و C' منتصفات [BC]

و [AC] و [AB] على التوالي :

$$\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = \vec{0} \quad \text{أثبت أن :}$$

الجواب :



لدينا A' منتصف [BC] إذن :

$$\vec{AA'} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC})$$

$$\vec{BB'} = \frac{1}{2} (\vec{BC} + \vec{BA}) \quad \text{بنفس الطريقة لدينا}$$

$$\vec{CC'} = \frac{1}{2} (\vec{CA} + \vec{CB}) \quad \text{كذلك :}$$

ومنه

$$\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC} + \vec{BA} + \vec{CA} + \vec{CB})$$

$$= \frac{1}{2} (\vec{BC} + \vec{BA}) + \frac{1}{2} (\vec{CA} + \vec{CB})$$

الجواب :

$$3 \vec{IA} - \vec{AB} = \vec{IB} + 2 \vec{AB} \quad \text{لدينا}$$

$$3 \vec{IA} - \vec{IB} = \vec{AB} + 2 \vec{AB} \quad \text{يعني}$$

$$2 \vec{IA} + \vec{IA} + \vec{BI} = 3 \vec{AB} \quad \text{يعني}$$

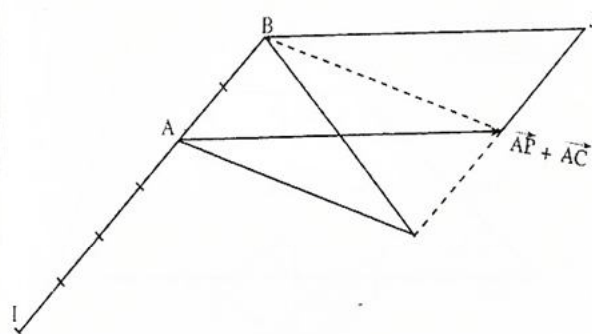
$$2 \vec{IA} + \vec{BA} = 3 \vec{AB} \quad \text{يعني}$$

$$2 \vec{IA} = 4 \vec{AB} \quad \text{يعني}$$

$$\vec{AI} = 2 \vec{AB} \quad \text{يعني}$$

$$- \text{لدينا } \vec{AB} = \vec{AC} \quad \vec{BJ} = \vec{AB} \quad \text{يعني}$$

$$\vec{BJ} = \vec{AB} \quad \vec{AC}$$



تمرين 6:

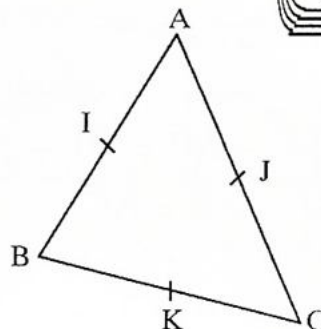
ليكن ABC مثلثا و I منتصف [AB] و J

منتصف [AC] و K منتصف [BC].

$$1 - \text{أثبت أن : } \vec{IJ} = \frac{1}{2} \vec{BC}$$

2 - استنتج أن IJKB متوازي الأضلاع.

الجواب :



$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \quad \text{ومنه}$$

وهذا يعني أن A : منتصف [CN].

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} \quad 3 - \text{ لدينا}$$

يعني أن AMNB متوازي أضلاع.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} \quad \text{إذن}$$

$$\text{لدينا } \overrightarrow{ME} = 2\overrightarrow{AM} \text{ أي A منتصف [ME]}$$

$$\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AM} \quad \text{وبالتالي}$$

$$= \overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{إذن}$$

وبالتالي ABEC متوازي الأضلاع

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE} \quad \text{ومنه}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} \quad \text{وحيث أن}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CE} \quad \text{فإن}$$

وهذا يعني أن MNEC متوازي الأضلاع.

تمرين 9:

ليكن ABCD متوازي الأضلاع.

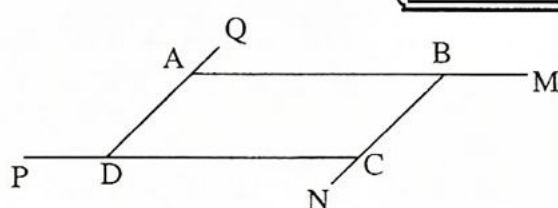
1 - أنشئ النقط M ، N و P و Q بحيث :

$$\overrightarrow{CP} = \frac{4}{3} \overrightarrow{CD} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AM} = \frac{4}{3} \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{DQ} = \frac{4}{3} \overrightarrow{DA} \quad \text{و}$$

2 - أثبت أن الرباعي MNPQ متوازي الأضلاع.

الجواب :



$$= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$

$$= \frac{1}{2} (\vec{0})$$

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0} \quad \text{إذن :}$$

تمرين 8:

ليكن ABC مثلثا و M و N نقطتان من المستوى

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{حيث : (P)}$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} \quad \text{و}$$

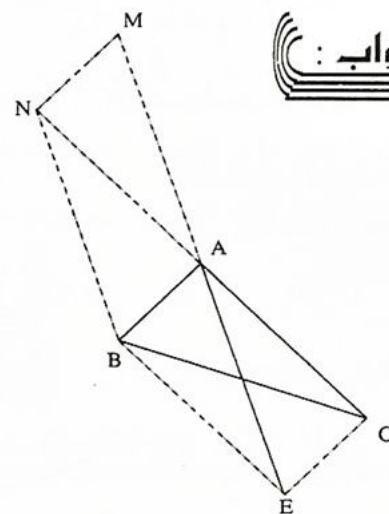
1 - أنشئ الشكل.

2 - بين أن A منتصف [CN].

3 - نعتبر النقطة E حيث $\overrightarrow{ME} = 2\overrightarrow{MA}$.

ماهي طبيعة الرباعي MNEC ؟

الجواب :



$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{لدينا}$$

$$\overrightarrow{AM} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \quad \text{أي}$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} \quad 2 - \text{ لدينا}$$

$$= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$$

$$= -\overrightarrow{AC}$$

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

$$\vec{BG} = \vec{GA} + \vec{GC} \quad \text{يعني}$$

$$\vec{GE} = \vec{GA} + \vec{GC} \quad \text{ونعلم أن}$$

$$\vec{BG} = \vec{GE} \quad \text{إذن}$$

ومنه G منتصف [BE].

تمرين 11:

نعتبر المثلث ABC في المستوى (P).

1 - لتكن المتجهة :

$$\vec{u} = 4\vec{AB} - \vec{AC} + \frac{5}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{CA}$$

بين أن المتجهة $\vec{u}$ و $\vec{BC}$ مستقيمتان.

2 - لتكن المتجهة :

$$\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{AB} - 2\vec{BC} + 4\vec{BA} + \frac{3}{2}\vec{AC}$$

أ - أحسب $\vec{v}$ بدلالة $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$.

ب - بين أن $\vec{v}$ و $\vec{W}$ مستقيمتان علما أن :

$$\vec{W} = 9\vec{AB} + 3\vec{AC}$$

الجواب :

1 - لدينا

$$\vec{u} = 4\vec{AB} - \frac{5}{2}\vec{AB} - \vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AC}$$

$$= \frac{3}{2}\vec{AB} - \frac{3}{2}\vec{AC}$$

$$= \frac{3}{2}(\vec{AB} + \vec{CA}) = \frac{3}{2}\vec{CB}$$

$$\vec{u} = -\frac{3}{2}\vec{BC} \quad \text{ومنه :}$$

وهذا يعني أن $\vec{u}$ و $\vec{BC}$ مستقيمتان.

2 - أ - لدينا :

$$\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{AB} - 2\vec{BC} + 4\vec{BA} + \frac{3}{2}\vec{AC}$$

$$\vec{PQ} = \vec{PC} + \vec{CD} + \vec{DQ} \quad \text{لدينا}$$

$$= \frac{4}{3}\vec{DC} + \vec{CD} + \frac{4}{3}\vec{DA}$$

$$= \frac{4}{3}\vec{AB} + \vec{BA} + \frac{4}{3}\vec{CB}$$

$$= \vec{AM} + \vec{BA} + \vec{NB}$$

$$\vec{PQ} = \vec{NM} \quad \text{ومنه}$$

وبالتالي : MNPQ متوازي الأضلاع.

تمرين 10:

ليكن ABC مثلثا و G مركز ثقل المثلث ABC.

1 - أنشئ النقطة G. والنقطة E بحيث :

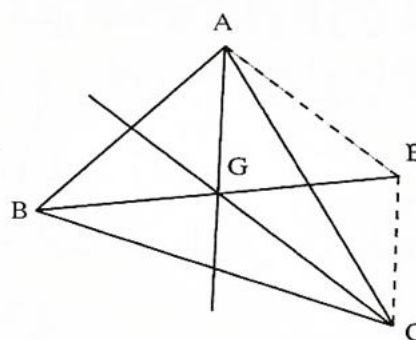
$$\vec{GE} = \vec{GA} + \vec{GC}$$

2 - أثبت أن G منتصف [BE].

الجواب :

1 - مركز ثقل المثلث ABC هو النقطة G نقطة

تلاقي المتوسطات.

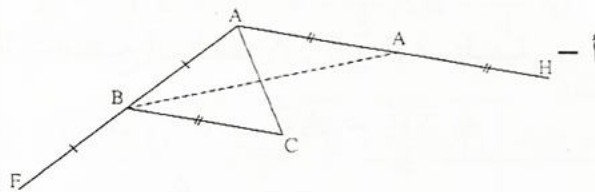


لدينا $\vec{GE} = \vec{GA} + \vec{GC}$ يعني GAEC

متوازي الأضلاع.

2 - لدينا G مركز ثقل المثلث ABC إذن :

وهذا يعني أن النقط B و D و E نقط مستقيمة.



$$\vec{AH} = 2\vec{BC} \quad \text{ب - لدينا :}$$

$$\vec{AC} + \vec{CH} = 2\vec{BC} \quad \text{ومنه}$$

$$\vec{CH} = 2\vec{BC} - \vec{AC} \quad \text{يعني :}$$

لدينا كذلك :

$$\vec{CF} = \vec{CB} + \vec{BF}$$

$$= -\vec{BC} + \vec{AB}$$

$$= -\vec{BC} + \vec{AC} + \vec{CB}$$

$$= -2\vec{BC} + \vec{AC}$$

$$\vec{CF} = -\vec{CH} \quad \text{إذن :}$$

ومنه H, C, F نقط مستقيمة.

يمكن أن نلاحظ أن C منتصف [FH].

تمرين 13

نعتبر متوازي الأضلاع ABCD.

$$\vec{BE} = \frac{1}{3} \vec{BC} \quad \text{1 - لتكن E بحيث :}$$

a - أنشئ النقطة E.

$$\vec{AE} = \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{BC} \quad \text{b - بين أن :}$$

واستنتج $\vec{AE}$ بدلالة $\vec{AB}$ و $\vec{AD}$.

$$\vec{CF} = 2\vec{DC} \quad \text{2 - لتكن F النقطة المعرفة ب :}$$

a - أنشئ النقطة.

$$= \frac{1}{2} \vec{AB} - 2\vec{BA} - 2\vec{AC} - 4\vec{BA} + \frac{3}{2} \vec{AC}$$

$$= \frac{1}{2} \vec{AB} + 2\vec{AB} - 2\vec{AC} - 4\vec{AB} + \frac{3}{2} \vec{AC}$$

$$\vec{v} = -\frac{3}{2} \vec{AB} - \frac{1}{2} \vec{AC} \quad \text{إذن :}$$

$$\vec{W} = 9\vec{AB} + 3\vec{AC} \quad \text{ب - لدينا :}$$

$$= -3(-3\vec{AB} - \vec{AC})$$

$$= -6(-\frac{3}{2} \vec{AB} - \frac{1}{2} \vec{AC})$$

$$\vec{W} = -6\vec{v}$$

ومنه $\vec{v}$ و $\vec{W}$ مستقيمتان.

تمرين 12

ABC مثلث.

1 - نعتبر النقطتين D و E حيث :

$$\vec{BE} = \frac{1}{2} \vec{BA} + \frac{2}{5} \vec{CA}$$

$$\vec{BD} = \frac{5}{2} \vec{AB} - \vec{CA} \quad \text{و}$$

بين أن النقط B و D و E مستقيمة.

2 - نعتبر النقطتين F و H حيث :

$$\vec{BF} = \vec{AB} \quad \text{و} \quad \vec{AH} = 2\vec{BC}$$

أ - أنشئ النقطتين F و H.

ب - بين أن النقط F و H و C مستقيمة.

الجواب :

$$\vec{BE} = \frac{1}{2} \vec{BA} + \frac{2}{5} \vec{CA} \quad \text{1 - لدينا :}$$

$$= -\frac{2}{5} (-\frac{5}{4} \vec{BA} - \vec{CA})$$

$$= -\frac{2}{5} (\frac{5}{4} \vec{AB} - \vec{CA})$$

$$\vec{BE} = -\frac{2}{5} \vec{BD} \quad \text{أي}$$

$$= 2 \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} \right)$$

$$\overrightarrow{EF} = 2 \overrightarrow{AE} \quad \text{إذن}$$

وبالتالي A , E , F نقط مستقيمة.

$$3 \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = 3 \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{EF} - 4$$

$$= 2 \overrightarrow{AE} - 2 \overrightarrow{AE}$$

$$3 \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \vec{0} \quad \text{إذن}$$

تمرين 14:

ليكن ABC مثلث بحيث I , J و K ثلاث نقط

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$$

1 - أنشئ النقط I , J , K .

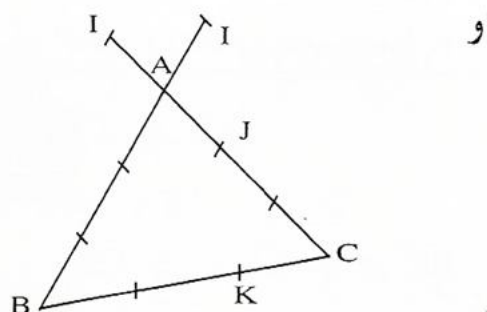
2 - أكتب $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

3 - استنتج أن J منتصف [IK].

الجواب:

$$1 - \text{لدينا } \overrightarrow{AI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BA} \text{ أي } \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} \text{ و } \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$$



$$2 - \text{لدينا : } \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$$

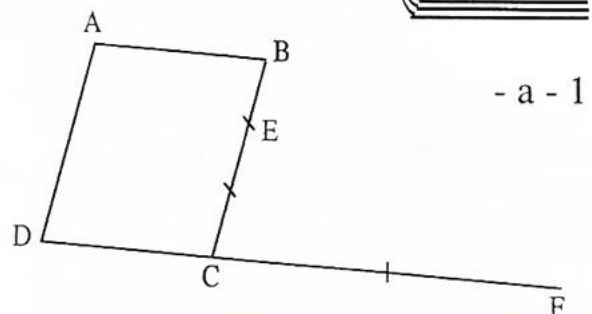
$$b - \text{بين أن } \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + 2 \overrightarrow{DC}$$

واستنتج $\overrightarrow{EF}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$.

3 - استنتج أن النقط A , E و F مستقيمة.

$$4 - \text{بين أن } 3 \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \vec{0}$$

الجواب:



- a - 1

$$b - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$$

$$\text{إذن : } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$$

لدينا ABCD متوازي الأضلاع إذن :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$\text{ومنه : } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}$$

2 - a - الإنشاء : (انظر الشكل).

$$b - \text{لدينا } \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF}$$

$$\text{إذن } \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + 2 \overrightarrow{DC}$$

$$\text{لدينا } \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + 2 \overrightarrow{DC}$$

$$= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + 2 \overrightarrow{DC}$$

$$= -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2 \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{EF} = 2 \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} \quad \text{ومنه}$$

- 3

$$\text{لدينا } \overrightarrow{EF} = 2 \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AD}$$

2 - لدينا

$$\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD}$$

ومنه

$$\vec{IJ} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD}$$

$$\begin{aligned}\vec{IK} &= \vec{IA} + \vec{AK} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{DK} \\ &= -\frac{1}{3}\vec{AB} + \vec{AD} - \vec{DC} \\ &= -\frac{1}{3}\vec{AB} + \vec{AD} - \vec{AB}\end{aligned}$$

$$\vec{IK} = -\frac{4}{3}\vec{AB} + \vec{AD} \quad \text{ومنه : إذن}$$

$$\vec{IK} = -\frac{4}{3}\vec{AB} + \vec{AD} \quad \text{3 - لدينا}$$

$$= 4\left(-\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD}\right)$$

$$\vec{IK} = 4\vec{IJ} \quad \text{إذن :}$$

وبالتالي I , J , K نقط مستقيمة.

تمرين 16

ABC مثلث في المستوى.

نعتبر النقطتين E و D حيث $3\vec{BD} = \vec{BC}$

$$\vec{CE} = 2\vec{BC} \quad \text{و}$$

1 - أنشئ الشكل.

$$\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} \quad \text{2 - أ - بين أن :}$$

وحدد $\vec{AE}$ بدلالة $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$.

ب - استنتج أن النقط A و E و D مستقيمة.

$$\text{بين أن : } \|\vec{AD}\| \leq \frac{1}{3}(\|\vec{CE}\| + \|\vec{AC}\|)$$

$$\vec{IK} = \vec{IA} + \vec{AB} + \vec{BK}$$

لدينا

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{3}\vec{AB} + \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC} \\ &= \frac{4}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BA} + \frac{2}{3}\vec{AC} \\ &= \frac{4}{3}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}\end{aligned}$$

$$\vec{IJ} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$$

$$\begin{aligned}\vec{IJ} &= \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC} \quad \text{3 - لدينا :} \\ &= 2\left(\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}\right)\end{aligned}$$

$$\vec{IK} = 2\vec{IJ} \quad \text{ومنه}$$

ومنه J منتصف [IK].

تمرين 15

ليكن ABCD متوازي الأضلاع.

$$\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB} \quad \text{I , J , k ثلاث نقط بحيث}$$

$$\vec{AJ} = \frac{1}{4}\vec{AD} \quad \text{و K بحيث D منتصف [KC].}$$

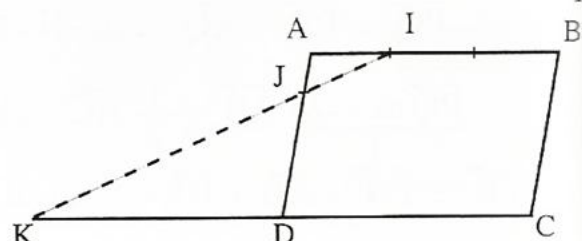
1 - أنشئ النقط I , J , K .

2 - أكتب $\vec{IJ}$ و $\vec{IK}$ بدلالة $\vec{AB}$ و $\vec{AD}$.

3 - استنتج أن I , J , K نقط مستقيمة.

الجواب :

1 -



وبالتالي :

$$\|\vec{AD}\| \leq \frac{1}{3} (\|\vec{CE}\| + \|\vec{AC}\|)$$

تمرين 17

ABC مثلث و P و Q و R ثلاث نقط حيث :

$$\vec{PB} + 2\vec{PA} = \vec{0} \text{ و } Q \text{ منتصف } [AC]$$

و R مماثلة بالنسبة للنقطة C.

1 - أنشئ النقط P , Q و R.

2 - أ - حدد كلا من المتجهين $\vec{PQ}$ و $\vec{PR}$

بدلالة المتجهين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$.

ب - استنتج أن النقط P و Q و R مستقيمة.

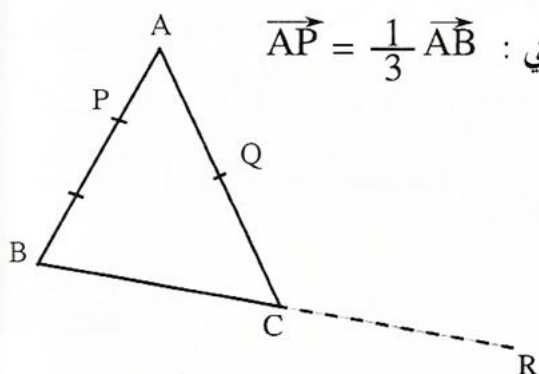
الجواب :

$$\vec{PB} + 2\vec{PA} = \vec{0} \text{ لدينا } 1 -$$

$$\vec{PA} + \vec{AB} + 2\vec{PA} = \vec{0} \text{ يعني :}$$

$$2\vec{PA} = -\vec{AB} \text{ يعني :}$$

$$\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB} \text{ يعني :}$$



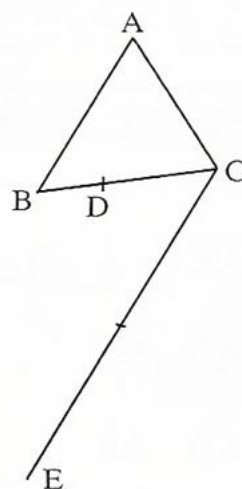
$$\vec{PQ} = \vec{PA} + \vec{AQ} \text{ لدينا } 2 - \text{ أ -}$$

$$\vec{PQ} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} \text{ إذن}$$

$$\vec{PR} = \vec{PA} + \vec{AB} + \vec{BR} \text{ ولدينا :}$$

الجواب :

- 1



$$\vec{BD} = \frac{1}{3}\vec{BC} \text{ لدينا}$$

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} \text{ 2 - أ - لدينا :}$$

$$= \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC}$$

$$= \vec{AB} + \frac{1}{3}(\vec{AC} - \vec{AB})$$

$$= \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{1}{3}\vec{AB}$$

$$\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} \text{ إذن}$$

$$\vec{AE} = \vec{AC} + \vec{CE} \text{ لدينا :}$$

$$\vec{AE} = \vec{AC} + 2\vec{AB} \text{ إذن}$$

$$\vec{AD} = \frac{1}{3}(\vec{AC} + 2\vec{AB}) \text{ ب - لدينا :}$$

$$\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{AE} \text{ إذن}$$

ومنه A , D , E نقط مستقيمة

$$\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} \text{ 3 - لدينا :}$$

$$= \frac{1}{3}(2\vec{AB} + \vec{AC})$$

$$= \frac{1}{3}(\vec{CE} + \vec{AC})$$

إذن

$$\|\vec{AD}\| = \|\vec{CE}\| + \|\vec{AC}\| \leq \frac{1}{3} (\|\vec{CE}\| + \|\vec{AC}\|)$$

$$\vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AF} \quad : \text{لدينا 2}$$

$$= \vec{ED} + \vec{DA} + \frac{4}{5} \vec{AD}$$

$$= \vec{DC} - \frac{1}{5} \vec{AD}$$

$$\boxed{\vec{EF} = \vec{AB} - \frac{1}{5} \vec{BC}} \quad : \text{إذن}$$

$$\vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AB} + \vec{BG} \quad : \text{لدينا 3}$$

$$= \vec{ED} + \vec{DA} + \vec{AB} + \frac{3}{5} \vec{BC}$$

$$= \vec{DC} - \vec{BC} + \vec{AB} + \frac{3}{5} \vec{BC}$$

$$= \vec{AB} - \vec{BC} + \vec{AB} + \frac{3}{5} \vec{BC}$$

$$\boxed{\vec{EG} = 2 \vec{AB} - \frac{2}{5} \vec{BC}} \quad : \text{إذن}$$

$$\vec{EG} = 2 \vec{AB} - \frac{2}{5} \vec{BC} \quad : \text{لدينا 4}$$

$$= 2 \left(\vec{AB} - \frac{1}{5} \vec{BC} \right)$$

$$\vec{EG} = 2 \vec{EF} \quad : \text{إذن}$$

وبالتالي F منتصف [EG].

5 - لإنشاء النقطة H ننشئ مجموع المتجهين $\vec{AB}$

و $\frac{2}{5} \vec{BC}$.

لدينا :

$$\vec{EH} - 3 \vec{EF} = \vec{EG} + \vec{GB} + \vec{BH} - 3 \left(\vec{AB} - \frac{1}{5} \vec{BC} \right)$$

$$= 2 \vec{AB} - \frac{2}{5} \vec{BC} = \frac{3}{5} \vec{BC} + \vec{AB} + \frac{2}{5} \vec{BC}$$

$$- 3 \vec{AB} + \frac{3}{5} \vec{BC}$$

$$= \vec{0}$$

$$\vec{EH} - 3 \vec{EF} = \vec{0} \quad : \text{وبالتالي}$$

$$\vec{EH} = 3 \vec{EF} \quad \text{يعني} \quad \vec{EH} - 3 \vec{EF} = \vec{0} \quad \text{لدينا}$$

ومنه E , F , H نقط مستقيمة.

$$= -\frac{1}{3} \vec{AB} + \vec{AB} + 2 \vec{BC}$$

$$= \frac{2}{3} \vec{AB} + 2 \vec{AC} - 2 \vec{AB}$$

$$\vec{PR} = -\frac{4}{3} \vec{AB} + 2 \vec{AC} \quad : \text{إذن}$$

$$\vec{PR} = -\frac{4}{3} \vec{AB} + 2 \vec{AC} \quad : \text{ب - لدينا}$$

$$= 4 \left(-\frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC} \right)$$

$$\vec{PR} = 4 \vec{PQ} \quad : \text{ومنه}$$

وبالتالي P , Q و R نقط مستقيمة.

تمرين 18 :

ليكن ABCD متوازي الأضلاع E و F و G

ثلاث نقط بحيث : D منتصف [EC],

$$\vec{BG} = \frac{3}{5} \vec{BC} \quad \text{و} \quad \vec{AF} = \frac{4}{5} \vec{AD}$$

1 - أنشئ النقط E , F و G.

$$\vec{EF} = \vec{AB} - \frac{1}{5} \vec{BC} \quad : \text{2 - بين أن}$$

3 - أكتب $\vec{EG}$ بدلالة $\vec{AB}$ و $\vec{BC}$.

4 - استنتج أن F منتصف [EG].

$$\vec{BH} = \vec{AB} + \frac{3}{5} \vec{BC} \quad : \text{5 - لتكن H بحيث}$$

a - أنشئ النقطة H.

$$\vec{EH} - 3 \vec{EF} = \vec{0} \quad : \text{b - بين أن}$$

c - استنتج أن E , H , F نقط مستقيمة.

الجواب :

