



مذكرة رقم 8 : درس: المعادلات والمتراجحات و النظم مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- المعادلات والمتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد؛ - المعادلات والمتراجحات من الدرجة الثانية بمجهول واحد؛ الشكل القانوني لثلاثية الحدود؛ المعادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد؛ إشارة ثلاثية الحدود؛ المتراجحات من الدرجة الثانية بمجهول واحد؛ النظم؛ المعادلات من الدرجة الأولى بمجهولين؛ نظمة معادلتين من الدرجة الأولى	- حل معادلات ومتراجحات تؤول في حلها إلى معادلات ومتراجحات من الدرجة الأولى أو الثانية بمجهول واحد. - حل نظمات من الدرجة الأولى بمجهولين باستعمال مختلف الطرائق (التأليفة الخطية، التعويض، المحددة). - تربيض وضعيات تتضمن مقادير متغيرة باستعمال تعابير أو معادلات أو متراجحات أو متفاوتات أو نظمات. - التمثيل المبياني لحلول متراجحات أو نظمات متراجحات من الدرجة الأولى بمجهولين واستعماله في تجويع المستوى وحل مسائل بسيطة حول البرمجة الخطية.	- إن تقنيات حل المعادلات والمتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد قد سبقت دراستها بالتعليم الثانوي الإعدادي لذا فإنه ينبغي تدعيم هذه الممارسة بحل ومناقشة أمثلة بسيطة توظف القيمة المطلقة أو معادلات بارامترية بسيطة وهادفة لتنمية قدرة التلاميذ على الاستدلال بفصل الحالات. - ينبغي تعويد التلاميذ على حل بعض المعادلات من الدرجة الثانية دون اللجوء إلى المميز (جذور بديهية، استعمال إحدى تقنيات التعميل، ...). - تعتبر المعادلات والمتراجحات البارامترية من الدرجة الثانية خارج المقرر. - ينبغي إدراج مسائل مستقاة من الحياة المعاشة أو من مواد دراسية أخرى بهدف تعويد التلاميذ على تربيض

I. المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد (تذكير)

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين.

كل معادلة على الشكل $ax + b = 0$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد، حيث x هو المجهول.

أمثلة: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$(1) -2x + 22 = 0 \quad (2) 3(2x + 5) = 6x - 1$$

$$(3) 4(x - 2) = 6x - 2(x + 4) \quad (4) 9x^2 - 16 = 0$$

$$(5) \frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9} = 0$$

الأجوبة: (1) $-2x + 22 = 0$ يعني $-2x = -22$

$$\text{يعني } -2x = -22$$

$$\text{يعني } -2x \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -22 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

يعني $x = 11$ ومنه: $S = \{11\}$ وتسمى مجموعة حلول المعادلة

$$(2) 3(2x + 5) = 6x - 1 \text{ يعني } 6x + 15 = 6x - 1$$

$$\text{يعني } 6x - 6x = -1 - 15 \text{ يعني } 0x = -16$$

وهذا غير ممكن ومنه: $S = \emptyset$

$$(3) 4(x - 2) = 6x - 2(x + 4) \text{ يعني } 4x - 8 = 6x - 2x - 8$$

$$\text{يعني } 4x - 4x + 8 - 8 = 0 \text{ يعني } 0 = 0$$

ومنه: كل عدد حقيقي هو حل لهذه المعادلة وبالتالي: $S = \mathbb{R}$

(4) أمامنا معادلة من الدرجة الثانية

$$\text{طريقة 1: (التعميل) } 9x^2 - 16 = 0 \text{ يعني } (3x)^2 - 4^2 = 0$$

$$\text{يعني } (3x - 4)(3x + 4) = 0 \text{ يعني } 3x - 4 = 0 \text{ أو } 3x + 4 = 0$$

$$\text{يعني } 3x = 4 \text{ أو } 3x = -4 \text{ يعني } x = \frac{4}{3} \text{ أو } x = -\frac{4}{3}$$

$$\text{ومنه: } S = \left\{-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right\}$$

$$\text{طريقة 2: } 9x^2 - 16 = 0 \text{ يعني } 9x^2 = 16 \text{ يعني } x^2 = \frac{16}{9}$$

$$\text{يعني } x = \sqrt{\frac{16}{9}} \text{ أو } x = -\sqrt{\frac{16}{9}} \text{ يعني } x = \frac{4}{3} \text{ أو } x = -\frac{4}{3}$$

$$(5) \frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9} = 0 \text{ هناك مرحلتين لحل مثل هذه المعادلات}$$

المرحلة 1: نحدد أولا مجموعة تعريف المعادلة

$$\text{المعادلة لها معنى يعني } x^2 - 9 \neq 0$$

$$x^2 - 9 = 0 \text{ يعني } x^2 - 3^2 = 0 \text{ يعني } (x-3)(x+3) = 0$$

$$\text{يعني } x+3=0 \text{ أو } x-3=0 \text{ يعني } x=-3 \text{ أو } x=3$$

$$\text{ومنه: } D_E = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

$$\text{المرحلة 2: الحل الفعلي للمعادلة: } \frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9} = 0 \text{ يعني}$$

$$(x-7)(x+3) = 0 \text{ يعني } x-7=0 \text{ أو } x+3=0$$

$$\text{يعني } x=7 \in D_E \text{ أو } x=-3 \notin D_E \text{ ومنه: } S = \{7\}$$

تمرين 1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$(1) \frac{x+1}{2} + 4 = \frac{2x-5}{10} + \frac{2(x+10)}{5}$$

$$(2) x^3 - 7x = 0$$

$$(3) (5x-7)^2 - (5x-7)(2x+3) = 0$$

$$(4) \frac{(x-1)(x+2)}{x^2-16} = 0$$

$$(5) \frac{x+1}{x+2} = \frac{x-5}{x-2}$$

$$\text{الجواب: (1) } \frac{x+1}{2} + 4 = \frac{2x-5}{10} + \frac{2(x+10)}{5} \text{ (نوحده المقامات)}$$

$$\text{يعني } \frac{5x+5}{10} + \frac{40}{10} = \frac{2x-5}{10} + \frac{4x+40}{10}$$

$$\text{يعني } \frac{5x+5+40}{10} = \frac{2x-5+4x+40}{10}$$

$$\text{يعني } 5x+5+40 = 2x-5+4x+40$$

$$\text{يعني } -x = -10 \text{ ومنه: } S = \{10\}$$

$$(2) x^3 - 7x = 0 \text{ يعني } x(x^2 - 7) = 0 \text{ (التعميل)}$$

$$\text{يعني } x = 0 \text{ أو } x^2 - 7 = 0 \text{ يعني } x^2 = 7 \text{ أو } x = 0$$

$$\text{يعني } x = \sqrt{7} \text{ أو } x = -\sqrt{7} \text{ ومنه: } S = \{-\sqrt{7}, 0, \sqrt{7}\}$$

$$(3) (5x-7)^2 - (5x-7)(2x+3) = 0$$

$$\text{يعني } (5x-7)[(5x-7)-(2x+3)] = 0$$

$$\text{يعني } (5x-7)(3x-10) = 0 \text{ يعني } 5x-7=0 \text{ أو } 3x-10=0$$

$$\text{يعني } 5x = 7 \text{ أو } 3x = 10$$

$$\text{يعني } x = \frac{7}{5} \text{ أو } x = \frac{10}{3}$$

$$\text{ومنه: } S = \left\{\frac{7}{5}, \frac{10}{3}\right\}$$

و بما أن: $3x + 6 \geq 0$ و $a > 0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$3x + 6$	$-$	0	$+$

و منه فان : $S = [-2; +\infty[$

تمرين 2 : حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المتراجحات التالية:

$$(1) \quad -2x + 12 > 0 \quad (2) \quad 5x - 15 \leq 0$$

$$(3) \quad 4x^2 - 9 \geq 0 \quad (4) \quad (1-x)(2x+4) > 0$$

$$(5) \quad \frac{5x-2}{1+3x} \geq 0 \quad (6) \quad \frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6} \leq 0$$

الأجوبة 1: $-2x + 12 > 0$

$$-2x + 12 = 0 \text{ يكافئ } x = 6$$

و بما أن: $-2 = a$ و $a < 0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$-2x + 12$	$+$	0	$-$

و منه فان : $S =]-\infty; 6[$

$$(2) \quad 5x - 15 \leq 0$$

$$5x - 15 = 0 \text{ يكافئ } x = 3$$

و بما أن: $5 = a$ و $a > 0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$5x - 15 = 0$	$-$	0	$+$

و منه فان : $S =]-\infty; 3[$

$$(3) \quad 4x^2 - 9 \geq 0$$

$$4x^2 - 9 = 0 \text{ يعني } (2x)^2 - 3^2 = 0 \text{ يعني } (2x-3)(2x+3) = 0$$

$$\text{يعني } 2x+3=0 \text{ أو } 2x-3=0 \text{ يعني } x = -\frac{3}{2} \text{ أو } x = \frac{3}{2}$$

الطريقة: في جدول نعطي إشارة كل عامل على الشكل $ax + b$ ثم استنتج إشارة

الجداء أو الخارج مع ترتيب تزايد للقيم التي يندمج فيها كل عامل.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x+3$	$-$	0	$+$	$+$
$2x-3$	$-$	$-$	0	$+$
$(2x-3)(2x+3)$	$+$	0	$-$	$+$

و منه فان : $S =]-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}; +\infty[$

$$(4) \quad (1-x)(2x+4) > 0$$

$$(1-x)(2x+4) = 0 \text{ يعني } 1-x=0 \text{ أو } 2x+4=0 \text{ يعني } x=1 \text{ أو } x=-2$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$2x+4$	$-$	0	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	0	$-$
$(1-x)(2x+4)$	$-$	0	$+$	$-$

و منه فان : $S =]-2; 1[$

$$(5) \quad \frac{5x-2}{1+3x} \geq 0 \text{ المرحلة 1: نحدد أولا مجموعة تعريف المتراجحة}$$

$$\text{المتراجحة لها معنى يعني } 1+3x \neq 0 \text{ يعني } x \neq -\frac{1}{3}$$

$$\text{ومنه: } D_I = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$$

المرحلة 2: الحل الفعلي للمتراجحة

$$\text{يعني } x = \frac{7}{5} \text{ أو } x = \frac{10}{3} \text{ ومنه: } S = \left\{ \frac{7}{5}, \frac{10}{3} \right\}$$

$$(4) \quad \frac{(x-1)(x+2)}{x^2-16} = 0$$

هناك مرحلتين لحل مثل هذه المعادلات

المرحلة 1: نحدد أولا مجموعة تعريف المعادلة

$$\text{المعادلة لها معنى يعني } x^2 - 16 \neq 0$$

$$x^2 - 16 = 0 \text{ يعني } x^2 - 4^2 = 0 \text{ يعني } (x-4)(x+4) = 0$$

$$\text{يعني } x+4=0 \text{ أو } x-4=0 \text{ يعني } x = -4 \text{ أو } x = 4$$

$$\text{ومنه: } D_E = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$$

المرحلة 2: الحل الفعلي للمعادلة

$$\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-16} = 0 \text{ يعني } (x-1)(x+2) = 0 \text{ يعني } x-1=0 \text{ أو } x+2=0$$

$$\text{يعني } x+2=0 \text{ أو } x-1=0 \text{ يعني } x = -2 \text{ أو } x = 1 \text{ ومنه: } S = \{-2, 1\}$$

$$(5) \quad \frac{x+1}{x+2} = \frac{x-5}{x-2}$$

هناك مرحلتين لحل مثل هذه المعادلات

المرحلة 1: نحدد أولا مجموعة تعريف المعادلة

$$\text{المعادلة لها معنى يعني } x-2 \neq 0 \text{ و } x+2 \neq 0$$

$$\text{يعني } x \neq -2 \text{ و } x \neq 2$$

$$\text{ومنه: } D_E = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

$$\text{المرحلة 2: الحل الفعلي للمعادلة: } \frac{x+1}{x+2} = \frac{x-5}{x-2}$$

$$(x+1)(x-2) = (x-5)(x+2)$$

$$\text{يعني } x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - 5x + 2x - 10$$

$$\text{يعني } -x + 3x = -10 + 2 \text{ يعني } 2x = -8 \text{ يعني } x = -4 \in D_E$$

$$\text{ومنه: } S = \{-4\}$$

II. المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد (تذكير):

1. تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين كل متراجحة على

$$\text{الشكل } ax + b \geq 0 \text{ أو } ax + b > 0 \text{ أو } ax + b \leq 0 \text{ أو } ax + b < 0$$

أو $ax + b < 0$ تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد حيث x هو المجهول.

2. إشارة الحدانية $ax + b$:

نلخص الجدولين في الجدول التالي:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	إشارة a	0 عكس إشارة a	إشارة a

مثال 1: لنحدد إشارة $2x + 1$

$$2x + 1 = 0 \text{ يكافئ } x = -\frac{1}{2}$$

و بما أن $a = 2$ و $a > 0$ فان جدول إشارة $2x + 1$ هو كالتالي:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x + 1$	$-$	0	$+$

مثال 2: لنحدد إشارة $-x + 2$

$$-x + 2 = 0 \text{ يكافئ } x = 2$$

و بما أن: $a = -1$ و $a < 0$ فان جدول إشارة $-x + 2$ هو كالتالي:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x + 2$	$-$	0	$+$

مثال 3: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية : $3x + 6 \geq 0$

$$3x + 6 = 0 \text{ يكافئ } x = -2$$

$$5x - 2 = 0 \text{ يعني } x = \frac{2}{5}$$

$$1 + 3x = 0 \text{ يعني } x = -\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$1+3x$	-	0	+	+
$5x-2$	-	-	0	+
$\frac{5x-2}{1+3x}$	+	-	0	+

$$S =]-\infty; -\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{5}; +\infty[$$

$$(6) \quad \frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6} \leq 0$$

المرحلة 1: نحدد أولا مجموعة تعريف المترابحة
المترابحة لها معنى يعني $2x - 6 \neq 0$ يعني $x \neq 3$

$$\text{ومنه: } D_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

المرحلة 2: الحل الفعلي للمترابحة

$$5x - 10 = 0 \text{ يعني } x = 2$$

$$2x + 1 = 0 \text{ يعني } x = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	3	$+\infty$
$2x+1$	-	0	+	+	+
$5x-10$	-	-	0	+	+
$2x-6$	-	-	-	0	+
$\frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6}$	-	0	+	0	+

$$S =]-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [2; 3[$$

III. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

1. تعريف: المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث x هو المجهول أعداد حقيقية معلومة ($a \neq 0$) تسمى معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد.

مثال 1: العدد -1 حل للمعادلة $3x^2 + 5x + 2 = 0$

$$\text{لأن: } 3(-1)^2 + 5(-1) + 2 = 0$$

مثال 2: العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $x^2 + (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$

$$\text{لأن: } (\sqrt{3})^2 + (1 - \sqrt{3})\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3} - 3 - \sqrt{3} = 0$$

ملاحظة: كل عدد حقيقي x_0 يحقق المتساوية $ax^2 + bx + c = 0$

هو حل للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ويسمى جذر

للحدودية $ax^2 + bx + c$.

2. الشكل القانوني لثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$.

خاصية: a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية، و a غير منعدم.

$$\text{لكل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ لدينا: } ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$$

$$\text{الكتابة } a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \text{ تسمى الشكل القانوني لثلاثية}$$

الحدود $ax^2 + bx + c$.

مثال: نعتبر الحدودية $P(x) = 2x^2 + 5x + 2$.

$$\text{لدينا } P(x) = 2 \left(\left(x + \frac{5}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \right) \text{ و بالتالي } 2 \left(\left(x + \frac{5}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \right) \text{ هو الشكل}$$

القانوني لثلاثية الحدود $2x^2 + 5x + 2$.

(3) حل معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

تعريف: لتكن ثلاثية الحدود $P(x) = ax^2 + bx + c$.

العدد الحقيقي $b^2 - 4ac$ يسمى مميز ثلاثية الحدود أو مميز المعادلة

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ و نرمز له بالرمز } \Delta.$$

مثال: نعتبر المعادلة لنحسب مميز المعادلة (E)

$$\text{لدينا: } a = 3 \text{ و } b = -5 \text{ و } c = 7 \text{ بما أن: } \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\text{فان: } \Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 7 = 25 - 84 = -59$$

ملاحظة: الرمز Δ يقرأ: دلتا.

تمرين 3: الشكل القانوني لثلاثية الحدود:

$$\text{لنحدد الشكل القانوني لثلاثية الحدود: } 2x^2 + 6x + 15$$

$$\text{لدينا: } 2x^2 + 6x + 15 = 2 \left(\left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{21}{4} \right)$$

$$= 2 \left(\left(x + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{21}{4} \right)$$

خاصية: نعتبر المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) وليكن Δ مميزها.

✓ إذا كان $\Delta < 0$ فان المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$.

✓ إذا كان $\Delta = 0$ فان المعادلة تقبل حلا وحيدا هو: $-\frac{b}{2a}$.

✓ إذا كان $\Delta > 0$ فان المعادلة تقبل حلين مختلفين هما

$$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

نرمز لمجموعة حلول المعادلة بالرمز S .

مثال 1: المعادلة $3x^2 + x + 2 = 0$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$

لأن $\Delta < 0$ ($\Delta = 1 - 4 \times 3 \times 2 = -23$) و بالتالي مجموعة حلولها هي $S = \emptyset$.

مثال 2: المعادلة $x^2 - 10x + 25 = 0$ لها حل وحيد

$$\text{لأن } \Delta = 0 \quad (\Delta = 10^2 - 4 \times 25 = 0)$$

حل هذه المعادلة هو: $\frac{b}{2a} = 5$ و بالتالي مجموعة حلولها هي $S = \{5\}$.

مثال 3: نعتبر المعادلة $x^2 - 3x + 2 = 0$ لدينا $\Delta = 9 - 4 \times 2 = 1$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \text{ و } x_2 = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ ومنه } S = \{1; 2\}$$

تمرين 4: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$(1) \quad 6x^2 - 7x - 5 = 0 \quad (2) \quad 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$$

$$(3) \quad 3x^2 + x + 2 = 0 \quad (4) \quad 4x^2 - 8x + 3 = 0$$

$$(5) \quad x^2 - 4x + 2 = 0 \quad (6) \quad x^2 + 5x + 7 = 0$$

$$(7) \quad 2x^2 - 4x + 6 = 0 \quad (8) \quad x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$(9) \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$(1) \text{ الأجوبة: } a = 6 \text{ و } b = -7 \text{ و } c = -5 \quad 6x^2 - 7x - 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 6 \times (-5) = 49 + 120 = 169 = (13)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_1 = \frac{-(-7) + \sqrt{169}}{2 \times 6} = \frac{7+13}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \text{ يعني } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{ومنه: } S = \left\{ \frac{5}{3}, -\frac{1}{2} \right\} \quad x_2 = \frac{7-13}{12} = \frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$$

مثال: نعتبر المعادلة $20015x^2 - 2016x + 1 = 0$ (E)

بين أن العدد 1 حل للمعادلة (E) ثم حدد الحل الثاني.

الأجوبة: نعوض x ب 1 في المعادلة (E) فنجد:

$$20015 \times 1^2 - 2016 \times 1 + 1 = 20015 - 2016 + 1 = 18000 \neq 0$$

حسب الخاصية السابقة لدينا: $x_1 \times x_2 = \frac{1}{20015}$ ولدينا $x_1 = 1$

$$x_2 = \frac{1}{20015} \text{ إذن: } 1 \times x_2 = \frac{1}{20015}$$

تمرين 5: نعتبر المعادلة: $-2x^2 + \sqrt{2}x + 2 = 0$ (E):

1. بين أن المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين α و β بدون حسابهما

2. استنتج قيم ما يلي: $\alpha + \beta$ و $\alpha \times \beta$ و $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ و $\alpha^2 + \beta^2$

$$\alpha^3 + \beta^3 \text{ و } \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$$

الأجوبة: (1) $-2x^2 + \sqrt{2}x + 2 = 0$ إذن: $a = -2$ و $b = \sqrt{2}$ و $c = 2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{2})^2 - 4 \times (-2) \times 2 = 2 + 16 = 18 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين α و β

$$(2) \text{ حسب خاصية لدينا: } \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ و } \alpha \times \beta = \frac{c}{a}$$

$$\text{ومنه: } \alpha + \beta = -\frac{\sqrt{2}}{-2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } \alpha \times \beta = \frac{2}{-2} = -1$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha \beta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

و لدينا: $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ يعني

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$$

$$\text{يعني } \alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2(-1) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$\text{ولدينا: } \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha\beta} \text{ إذن: } \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\frac{5}{2}}{-1} = -\frac{5}{2}$$

$$\text{ونعلم أن: } (\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$\text{يعني } \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2$$

$$\text{يعني } \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$\text{إذن: } \alpha^3 + \beta^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 3(-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{يعني } \alpha^3 + \beta^3 = \frac{\sqrt{2}^3}{2^3} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} + 12\sqrt{2}}{8} = \frac{14\sqrt{2}}{8} = \frac{7\sqrt{2}}{4}$$

IV. تعميل وإشارة ثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$:

1. تعميل ثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$:

خاصية: نعتبر ثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$ وليكن Δ مميزها.

1. إذا كان: $\Delta > 0$ فإن المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلين

مختلفين x_1 و x_2 ولدينا: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

2. إذا كان: $\Delta = 0$ فإن: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

$$c = 1 \text{ و } b = -2\sqrt{2} \text{ و } a = 2 \quad 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 (2)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \times 2 \times 1 = 8 - 8 = 0$$

بما أن $\Delta = 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا هو:

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \text{ ومنه: } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2\sqrt{2})}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c = 2 \text{ و } b = 1 \text{ و } a = 3 \quad 3x^2 + x + 2 = 0 (3)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1 - 24 = -23 < 0$$

بما أن $\Delta < 0$ فإن المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ ومنه: $S = \emptyset$

$$c = 3 \text{ و } b = -8 \text{ و } a = 4 \quad 4x^2 - 8x + 3 = 0 (4)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 3 \times 4 = 64 - 48 = 16 = (4)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-(-8) - \sqrt{16}}{2 \times 4} \text{ و } x_1 = \frac{-(-8) + \sqrt{16}}{2 \times 4}$$

$$S = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\} \text{ ومنه: } x_2 = \frac{8-4}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ و } x_1 = \frac{8+4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$c = 2 \text{ و } b = -4 \text{ و } a = 1 \quad x^2 - 4x + 2 = 0 (5)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 16 - 8 = 8 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_1 = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(2+\sqrt{2})}{2} = 2+\sqrt{2} \text{ ومنه: } x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{8}}{2 \times 1} \text{ و } x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{8}}{2 \times 1}$$

$$S = \{2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\} \text{ ومنه: } x_2 = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(2-\sqrt{2})}{2} = 2-\sqrt{2}$$

$$c = 7 \text{ و } b = 5 \text{ و } a = 1 \quad x^2 + 5x + 7 = 0 (6)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 1 \times 7 = 25 - 28 = -3 < 0$$

بما أن $\Delta < 0$ فإن المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ ومنه: $S = \emptyset$

$$c = 6 \text{ و } b = -4 \text{ و } a = 2 \quad 2x^2 - 4x + 6 = 0 (7)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 16 - 48 = -32 < 0$$

بما أن $\Delta < 0$ فإن المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ ومنه: $S = \emptyset$

$$c = -21 \text{ و } b = -4 \text{ و } a = 1 \quad x^2 - 4x - 21 = 0 (8)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-21) = 16 + 84 = 100 = (10)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{100}}{2 \times 1} \text{ و } x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{100}}{2 \times 1}$$

$$S = \{-3, 7\} \text{ ومنه: } x_2 = \frac{4-10}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \text{ و } x_1 = \frac{4+10}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$c = 3 \text{ و } b = -6 \text{ و } a = 3 \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0 (9)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 36 - 36 = 0$$

بما أن $\Delta = 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا مزدوجا هو:

$$S = \{1\} \text{ ومنه: } x = \frac{-(-6)}{2 \times 3} = \frac{6}{6} = 1 \text{ يعني } x = \frac{-b}{2a}$$

(4) مجموع وجزاء حلي معادلة من الدرجة الثانية:

نشاط: نعتبر المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$ و $\Delta > 0$

$$\text{و } x_1 \text{ و } x_2 \text{ حلي المعادلة بين أن: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ و } x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

خاصية: إذا كان للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ (حيث $a \neq 0$) حلان x_1 و x_2

$$\text{فإنهما يحققان المتساويتين } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ و } x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

الحالة 2: إذا كان $\Delta = 0$: و x_1 هو الجذر الوحيد المزدوج فان:

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$P(x) = ax^2 + bx + c$	اشارة	0	اشارة

الحالة 3: إذا كان $\Delta < 0$ فان إشارة $P(x)$ هي إشارة العدد a فان:

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x) = ax^2 + bx + c$	اشارة	اشارة

مثال 1:

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$

2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$

أجوبة (1): $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ و $a = 2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$$x_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \text{ و } x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{3+1}{4} = 1$$

X	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

2) حل المتراجحة : $S = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right] \cup [1, +\infty[$

مثال 2:

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x) = -2x^2 + 4x - 2$

2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $-2x^2 + 4x - 2 > 0$

أجوبة (1): $P(x) = -2x^2 + 4x - 2$ و $a = -2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 16 - 16 = 0$$

بما أن $\Delta = 0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد هو:

$$x_1 = \frac{-(-4)}{2 \times (-2)} = -1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$P(x) = -2x^2 + 4x - 2$	-	0	-

2) حل المتراجحة : $S = \mathbb{R}$

مثال 3:

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x) = 3x^2 + 6x + 5$

2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $3x^2 + 6x + 5 < 0$

أجوبة (1): $P(x) = 3x^2 + 6x + 5$ و $a = 3 > 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 36 - 60 = -24 < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x) = 3x^2 + 6x + 5$	+	+

2) حل المتراجحة : $S = \emptyset$

تمرين 8 : حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

$$(1) \quad 4x^2 - 8x + 3 \leq 0 \quad (2) \quad 2x^2 - 4x + 6 \geq 0$$

$$x^2 - 3x - 10 < 0$$

أجوبة (1): $2x^2 - 4x + 6 \geq 0$ و $a = 2 > 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 48 = -32 < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x) = 2x^2 - 4x + 6$	+	+

ومنه : $S = \mathbb{R}$

3. إذا كان : $\Delta < 0$ فان : $ax^2 + bx + c$ لا يمكن تعميلها إلى

حدوديتين من الدرجة الأولى.

مثال: نعتبر الحدودية $R(x) = 6x^2 - x - 1$ مميز

الحدودية $R(x)$ هو $\Delta = 1 + 24 = 25$.

$$\text{إذن جذرا الحدودية: هما } x_1 = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2} \text{ و } x_2 = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{و بالتالي: } R(x) = 6 \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x + \frac{1}{3} \right)$$

تمرين 6 : عمل ثلاثيات الحدود التالية :

$$(1) \quad x^2 - 10x + 25 \quad (2) \quad x^2 - 3x + 2 \quad (3) \quad x^2 + x + 2$$

أجوبة (1): $x^2 - 10x + 25$: $a = 1$ و $b = -10$ و $c = 25$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 1 \times (25) = 100 - 100 = 0$$

بما أن $\Delta = 0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد هو:

$$x_1 = \frac{-(-10)}{2 \times 1} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\text{ومنه التعميل: } x^2 - 10x + 25 = a(x - x_1)^2 = 1(x - 5)^2$$

$$(2) \quad x^2 - 3x + 2 \quad a = 1 \quad b = -3 \quad c = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 1$$

ومنه التعميل :

$$x^2 - 3x + 2 = a(x - x_1)(x - x_2) = 1(x - 2)(x - 1)$$

$$(3) \quad 3x^2 + x + 2 \quad \text{لدينا:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1 - 24 = -23 < 0$$

ومنه فان هذه الحدودية لا يمكن تعميلها

تمرين 7 : عمل ثلاثيات الحدود التالية :

$$(1) \quad 2x^2 - 4x + 6 \quad (2) \quad 4x^2 - 8x + 3 \quad (3) \quad 3x^2 - 6x + 3$$

أجوبة (1): $2x^2 - 4x + 6 = 0$: $a = 2$ و $b = -4$ و $c = 6$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (6) = 16 - 48 = -32 < 0$$

ومنه فان هذه الحدودية لا يمكن تعميلها

$$(2) \quad 4x^2 - 8x + 3 = 0 \quad a = 4 \quad b = -8 \quad c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 4 \times 3 = 64 - 48 = 16 = (4)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$$x_1 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{8 + 4}{2 \times 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ومنه التعميل: } 4x^2 - 8x + 3 = 4 \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{3}{2} \right) = (4x - 2) \left(x - \frac{3}{2} \right)$$

$$(3) \quad 3x^2 - 6x + 3 \quad \text{بما أن } \Delta = 0 \quad \text{فان هذه الحدودية لها جذر وحيد}$$

$$\text{هو: } x_1 = \frac{-(-6)}{2 \times 3} = 1$$

$$\text{ومنه التعميل: } 3x^2 - 6x + 3 = a(x - x_1)^2 = 3(x - 1)^2$$

2. إشارة ثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$:

الحالة 1: إذا كان $\Delta > 0$ و x_1 و x_2 هما جذري ثلاثية الحدود فان:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$P(x) = ax^2 + bx + c$	اشارة	0	عكس اشارة	اشارة

تمرين 10 : نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث :

$$P(x) = x^3 - \sqrt{2}x^2 - x + \sqrt{2}$$

1. بين أن -1 هو جذر للحدودية $P(x)$

2. بين أن : $P(x) = (x+1)(x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2})$

نضع : $Q(x) = x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$

3. Δ هو مميز ثلاثية الحدود $Q(x)$ تأكد أن $\Delta = (\sqrt{2}-1)^2$

4. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $Q(x) = 0$

5. استنتج حلول المعادلة : $x - (\sqrt{2}+1)\sqrt{x} + \sqrt{2} = 0$

6. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$

7. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $P(x) \leq 0$

أجوبة (1) : $P(-1) = (-1)^3 - \sqrt{2}(-1)^2 - (-1) + \sqrt{2}$

$$P(-1) = -1 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 0$$

اذن -1 هو جذر للحدودية $P(x)$

$$(x+1)(x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}) = x^3 - (\sqrt{2}+1)x^2 + \sqrt{2}x + x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$$

$$= x^3 - (\sqrt{2}+1)x^2 + \sqrt{2}x + x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$$

$$= x^3 - \sqrt{2}x^2 - x^2 + \sqrt{2}x + x^2 - \sqrt{2}x - x + \sqrt{2}$$

$$= x^3 - \sqrt{2}x^2 - x + \sqrt{2}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{2}+1)^2 - 4 \times 1 \times \sqrt{2} (3)$$

$$\Delta = (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \times 1 + (1)^2 = (\sqrt{2}-1)^2$$

$$Q(x) = x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} (4)$$

بما أن $\Delta > 0$ فان للحدودية جذرين هما :

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}+1 + \sqrt{2}-1}{2 \times 1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}+1 - \sqrt{2}-1}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$S = \{\sqrt{2}, 1\}$$

$$x - (\sqrt{2}+1)\sqrt{x} + \sqrt{2} = 0 (5)$$

يمكن كتابتها على الشكل : $(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{2}+1)\sqrt{x} + \sqrt{2} = 0$

نضع : $X = \sqrt{x}$ والمعادلة تصبح على الشكل :

$$X^2 - (\sqrt{2}+1)X + \sqrt{2} = 0 \text{ حسب السؤال السابق : } X_1 = \sqrt{2} \text{ أو } X_2 = 1$$

$$\text{يعني } \sqrt{x_1} = \sqrt{2} \text{ أو } \sqrt{x_2} = 1$$

$$\text{يعني } (\sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{2})^2 \text{ أو } (\sqrt{x_2})^2 = (1)^2$$

$$\text{يعني } x_1 = 2 \text{ أو } x_2 = 1 \quad S = \{2, 1\}$$

$$P(x) = 0 \text{ يعني } x+1=0 \text{ أو } x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} = 0 (6)$$

$$\text{يعني } x = -1 \text{ أو } x_1 = \sqrt{2} \text{ أو } x_1 = 1 \text{ ومنه : } S = \{-1, 1, \sqrt{2}\}$$

$$P(x) \leq 0 \text{ يعني } (x+1)(x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}) \leq 0 (7)$$

x	$-\infty$	-1	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$	+	+	0	-	+
$x+1$	-	0	+	+	+
$P(x)$	-	0	+	0	+

$$S =]-\infty, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$$

$$a = 4 \quad 4x^2 - 8x + 3 \leq 0 (2)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 4 \times 3 = 64 - 48 = 16 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان للحدودية جذرين هما :

$$\text{ومنه : } x_1 = \frac{8-4}{8} = \frac{1}{2} \text{ و } x_1 = \frac{8+4}{2 \times 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$4x^2-8x+3$	+	0	-	0	+

$$S = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$$

$$a = 4 \quad x^2 - 3x - 10 < 0 (3)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان للحدودية جذرين هما :

$$\text{ومنه : } x_2 = -2 \text{ و } x_1 = 5$$

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$	
$4x^2-8x+3$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$S =]-2, 5[$$

V. معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين :

$\mathbb{R}^2$ هي مجموعة الأزواج (x, y) حيث $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$.

مثال : نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $2x + 3y = 2$

(1) تأكد أن الزوج $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ حل للمعادلة : $2x + 3y = 2$

(2) اعط ثلاث أزواج حلول للمعادلة : $2x + 3y = 2$

(3) حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $2x + 3y = 2$

أجوبة (1) : $2 \times 0 + 3 \times \frac{2}{3} = 2$ اذن $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ حل للمعادلة

(2) $x = 2$ اذن : $2 \times 2 + 3 \times y = 2$ يعني $y = -\frac{2}{3}$ اذن $\left(2, -\frac{2}{3}\right) \in S$

$x = 3$ اذن : $2 \times 3 + 3 \times y = 2$ يعني $y = -\frac{4}{3}$ اذن $\left(3, -\frac{4}{3}\right) \in S$

$x = 4$ اذن : $2 \times 4 + 3 \times y = 2$ يعني $y = -2$ اذن $(4, -2) \in S$

$$(3) \quad 2x + 3y = 2 \text{ يعني } 3y = -2x + 2 \text{ يعني } y = \frac{-2x+2}{3}$$

$$\text{يعني } y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \text{ اذن : } S = \left\{ \left(x, -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \right) / x \in \mathbb{R} \right\}$$

تمرين 9 : حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلات التالية :

$$(1) \quad 2x - 8y + 10 = 0 \quad (2) \quad -3x + 12y - 2 = 0$$

$$(3) \quad 7x - 14y + 1 = 0$$

أجوبة (1) : $2x - 8y + 10 = 0$ يعني $2y = 8x - 10$ يعني $y = \frac{8x-10}{2}$

$$\text{يعني } y = 4x - 5 \text{ اذن : } S = \{(x; 4x-5) / x \in \mathbb{R}\}$$

$$(2) \quad -3x + 12y - 2 = 0 \text{ يعني } 12y = 3x + 2 \text{ يعني } y = \frac{3x+2}{12}$$

$$\text{يعني } y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{6} \text{ اذن : } S = \left\{ \left(x; \frac{1}{4}x + \frac{1}{6} \right) / x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(3) \quad 7x - 14y + 1 = 0 \text{ يعني } 7x = 14y - 1 \text{ يعني } x = \frac{14y-1}{7}$$

$$\text{يعني } x = 2y - \frac{1}{7} \text{ اذن : } S = \left\{ \left(2y - \frac{1}{7}; y \right) / y \in \mathbb{R} \right\}$$

تمرين 11 : نعتبر المعادلة : $x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6} = 0$

1. نضع :

Δ هو مميز ثلاثية الحدود $P(x)$ تأكد أن $\Delta = 14 + 4\sqrt{6}$

2. املأ الفراغات التالية : $14 + 4\sqrt{6} = (\dots + \dots)^2$

3. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$

4. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $P(x) > 0$

5. استنتج حلول المعادلة : $x + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{x} - 2\sqrt{6} = 0$

أجوبة (1) : $\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 2\sqrt{6}$

$$\Delta = 12 - 4\sqrt{6} + 2 + 8\sqrt{6} = 14 + 4\sqrt{6} \text{ أي } \Delta = (2\sqrt{3})^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + 8\sqrt{6}$$

$$14 + 4\sqrt{6} = 14 + 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} = (2\sqrt{3})^2 + 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$$

$$14 + 4\sqrt{6} = (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$

$$P(x) = x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} \quad (3)$$

بما أن $\Delta = 14 + 4\sqrt{6} > 0$ فإن للمعادلة حلين هما :

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{14 + 4\sqrt{6}}}{2 \times 1} = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + (2\sqrt{3} + \sqrt{2})}{2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2 \times 1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$S = \{\sqrt{2}, -2\sqrt{3}\} \quad x_2 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2 \times 1} = \frac{-4\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$$

(4)

x	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6}$	+	0	-	+

$$S =]-\infty, -2\sqrt{3}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$$

$$x + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{x} - 2\sqrt{6} = 0 \quad (5)$$

يمكن كتابتها على الشكل : $(\sqrt{x})^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{x} - 2\sqrt{6} = 0$

نضع : $X = \sqrt{x}$ والمعادلة تصبح على الشكل :

$$X^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})X - 2\sqrt{6} = 0$$

حسب السؤال السابق : $X_1 = \sqrt{2}$ أو $X_2 = -2\sqrt{3}$

يعني $\sqrt{x_1} = \sqrt{2}$ أو $\sqrt{x_2} = -2\sqrt{3}$

نلاحظ أن المعادلة : $\sqrt{x_2} = -2\sqrt{3}$ ليس لها حل لأن الجذر دائما موجب

ومنه $(\sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{2})^2$ يعني $x_1 = 2$ ومنه $S = \{2\}$

VI. أنظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين:

نعتبر النظام : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ حيث a و b و a' و b' و c و c'

أعداد حقيقية. هناك عدة طرق لحل أنظمة سيق أن درست طريقتين هما طريقة التعويض و التاليفة الخطية طبعاً هناك طريقة أخرى انتبه

1. طريقة التعويض :

مثال: حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظام التالية : $\begin{cases} 4x + y = 10 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases}$

الجواب : نبحث عن y في المعادلة الأولى مثلاً

$$y = 10 - 4x \text{ يعني } 4x + y = 10$$

ونعوض y بقيمتها في المعادلة الثانية

$$-5x + 2(10 - 4x) = -19 \text{ يعني } -5x + 2y = -19$$

$$\text{يعني } -5x - 8x = -19 - 20 \text{ يعني } -13x = -39 \text{ يعني } x = 3$$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $y = 10 - 4x$ فنجد $y = -2$

ومنه : $S = \{(3, -2)\}$

2. طريقة التاليفة الخطية

مثال: حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظام التالية : $\begin{cases} 4x + y = 10 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases}$

الجواب : نضرب المعادلة الأولى في العدد (-2) فنحصل على :

$$\begin{cases} -8x - 2y = -20 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases} \text{ وجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:}$$

$$-13x = -39 \text{ يعني } -13x = -39 \text{ يعني } x = 3$$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $4x + y = 10$ فنجد $y = -2$

ومنه : $S = \{(3, -2)\}$

3. طريقة المحددة :

تعريف و خاصية: العدد الحقيقي $ab' - a'b$ يسمى محددة النظام

$$(S) \text{ و نكتب: } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

• إذا كان $\Delta = 0$ فإن النظام (S) قد لا يكون لها أي حل, و قد يكون لها عدد لا منته من الحلول.

• إذا كان $\Delta \neq 0$ فإن النظام (S) تسمى أنظمة كرامر و تقبل حلاً

وحيداً هو الزوج (x, y) حيث :

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{ac' - a'c}{\Delta} \text{ و } x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{cb' - c'b}{\Delta}$$

هذه الطريقة تسمى طريقة المحددة.

مثال: طريقة المحددة:

$$(1) \begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x + 4y = 2 \end{cases} \text{ حل في } \mathbb{R}^2 \text{ النظام:}$$

محددة النظام (1) هي: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ و منه النظام تقبل حلاً

$$\text{وحيداً هو: } x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2 \text{ و } y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1 \text{ و منه: } S = \{(2, 1)\}$$

$$(2) \begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -x + \frac{4}{3}y = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (1: 2) \quad \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} (\sqrt{5} - \sqrt{3})x + (\sqrt{2} - 1)y = 0 \\ (\sqrt{2} + 1)x + (\sqrt{5} + \sqrt{3})y = 1 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} x + y = 11 \\ x^2 - y^2 = 44 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ محددة النظام هي:}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2(x - 2y) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \Leftrightarrow -2y = 1 - x \Leftrightarrow x - 2y = 1 \Leftrightarrow$$

ومنه النظام (S) لها عدد لا منته من الحلول لأن :

$$S = \left\{ \left(x; \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) / x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(2) \begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -x + \frac{4}{3}y = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$$

و منه : $\frac{1}{y-2} = \frac{13}{11}$ و $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{11}$
 يعني: $x-1 = 11$ و $y-2 = \frac{11}{13}$ يعني: $x = 12$ و $y = \frac{37}{13}$
 و بالتالي: $S = \left\{ \left(12, \frac{37}{13} \right) \right\}$

تمرين 15 : حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظام التالية :

أجوبة: نضع: $X = \sqrt{x}$ و $Y = \sqrt{y}$ $\begin{cases} 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6 \\ -3\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = 17 \end{cases}$

ف نحصل على النظام التالية : $\begin{cases} 2X + Y = 6 \\ -3X + 5Y = 17 \end{cases}$

ونقوم بحل هذه النظام ونجد : $X = 1$ و $Y = 4$

و منه : $\sqrt{x} = 1$ و $\sqrt{y} = 4$ يعني: $(\sqrt{x})^2 = 1^2$ و $(\sqrt{y})^2 = 4^2$

يعني: $x = 1$ و $y = 16$ و بالتالي: $S = \{(1, 16)\}$

تمرين 16 : حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظام التالية :

أجوبة: نضع: $X = x^2$ و $Y = y^2$ $\begin{cases} 2x^2 - 5y^2 = 1 \\ 4x^2 + 3y^2 = 15 \end{cases}$

ف نحصل على النظام التالية : $\begin{cases} 2X - 5Y = 1 \\ 4X + 3Y = 15 \end{cases}$

ونقوم بحل هذه النظام ونجد : $X = 3$ و $Y = 1$

و منه : $x^2 = 3$ و $y^2 = 4$

يعني: $x = \sqrt{3}$ او $x = -\sqrt{3}$ و $y = \sqrt{1}$ او $y = -\sqrt{1}$

يعني: $x = \sqrt{3}$ او $x = -\sqrt{3}$ و $y = 1$ او $y = -1$

و بالتالي: $S = \{(\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1), (-\sqrt{3}, 1), (-\sqrt{3}, -1)\}$

تمرين 17 : حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظام التالية :

$\begin{cases} (x^2 - 3x + 1) + (y^2 - 5x + 4) = -3 \\ 2(x^2 - 3x + 1) - 3(y^2 - 5x + 4) = 4 \end{cases}$

أجوبة: نضع: $X = x^2 - 3x + 1$ و $Y = y^2 - 5x + 4$

ف نحصل على النظام التالية : $\begin{cases} X + Y = -3 \\ 2X - 3Y = 4 \end{cases}$

ونقوم بحل هذه النظام ونجد : $X = -1$ و $Y = -2$

و منه : $x^2 - 3x + 1 = -1$ و $y^2 - 5x + 4 = -2$

يعني: $x^2 - 3x + 2 = 0$ و $y^2 - 5x + 6 = 0$

نحل المعادلة : $x^2 - 3x + 2 = 0$ باستعمال المميز فنجد :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (2) = 1 > 0$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{3}{2}$ و $x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2$

نحل المعادلة : $y^2 - 5x + 6 = 0$ باستعمال المميز فنجد :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$y_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2$ و $y_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 3$

و بالتالي: $S = \{(1, 3), (1, 2), (2, 3), (2, 2)\}$

و هذا غير ممكن و منه $S = \emptyset$

$\begin{cases} (\sqrt{5} - \sqrt{3})x + (\sqrt{2} - 1)y = 0 \\ (\sqrt{2} + 1)x + (\sqrt{5} + \sqrt{3})y = 1 \end{cases}$

محددة النظام هي:

$\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{5} - \sqrt{3} & \sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{2} + 1 & \sqrt{5} + \sqrt{3} \end{vmatrix} = (\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) - (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$

$\Delta = (5 - 3) - (2 - 1) = 1 \neq 0$ اذن $\Delta = ((\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2) - ((\sqrt{2})^2 - (1)^2)$

و منه النظام تقبل حلا وحيدا:

$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} - 1 \\ 1 & \sqrt{5} + \sqrt{3} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-(\sqrt{2} - 1)}{1} = -\sqrt{2} + 1 = 1 - \sqrt{2}$ هو

$y = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{5} - \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} + 1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{1} = -\sqrt{5} + \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{5}$ و

و منه: $S = \{(1 - \sqrt{2}, \sqrt{3} - \sqrt{5})\}$

تمرين 13 : حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظام التالية :

(2) استنتج حلول النظام التالية : $\begin{cases} -7x - 3y = 4 \\ 4x + 5y = -2 \end{cases}$

أجوبة: (1) محددة النظام (1) هي: $\begin{cases} \frac{-7}{x} - \frac{3}{y} = 4 \\ \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = -2 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -35 + 12 = -23 \neq 0$ و منه النظام تقبل حلا وحيدا:

هو $x = \frac{\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2}{-23}$ و $y = \frac{\begin{vmatrix} -7 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{14}{-23}$ و منه: $S = \left\{ \left(-\frac{2}{23}, -\frac{14}{23} \right) \right\}$

(2) لكي تكون للنظام معنى يجب أن يكون لدينا : $x \neq 0$ و $y \neq 0$

نضع: $X = \frac{1}{x}$ و $Y = \frac{1}{y}$ $\begin{cases} -7\frac{1}{x} - 3\frac{1}{y} = 4 \\ 4\frac{1}{x} + 5\frac{1}{y} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-7}{x} - \frac{3}{y} = 4 \\ \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = -2 \end{cases}$

$\begin{cases} -7X - 3Y = 4 \\ 4X + 5Y = -2 \end{cases}$ فنحصل على النظام التالية : $x \neq 0$ و $y \neq 0$

وسبق أن قمنا بحل هذه النظام : $X = -\frac{14}{23}$ و $Y = -\frac{2}{23}$

و منه : $\frac{1}{x} = -\frac{14}{23}$ و $\frac{1}{y} = -\frac{2}{23}$ يعني: $x = -\frac{23}{14}$ و $y = -\frac{23}{2}$

و بالتالي: $S = \left\{ \left(-\frac{23}{14}, -\frac{23}{2} \right) \right\}$

تمرين 14 : حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظام التالية :

أجوبة: نضع: $X = \frac{1}{x-1}$ و $Y = \frac{1}{y-2}$ $\begin{cases} \frac{5}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 4 \\ \frac{-2}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 1 \end{cases}$ و $x \neq 1$ و $y \neq 2$

ف نحصل على النظام التالية : $\begin{cases} 5X + 3Y = 4 \\ -2X + Y = 1 \end{cases}$

ونقوم بحل هذه النظام ونجد : $X = \frac{1}{11}$ و $Y = \frac{13}{11}$

VII. المراجعات والتجوية

دراسة مثال: في الشكل أسفله نعتبر المستقيم (D) الذي

معادلته: $\frac{1}{2}x - y + 1 = 0$. المستقيم (D) يحدد نصفي مستوى

حافتهما (D) أحدهما يحتوي على النقطة O (أصل المعلم) و نرمز له بالرمز (P_2) و للآخر بالرمز (P_1) .

← النقطة $A(1,1)$ تنتمي إلى (P_2) و تحقق:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 - 1 + 1 > 0 \text{ لأن } \frac{1}{2}x_A - y_A + 1 > 0$$

← النقطة $B(-2,1)$ تنتمي إلى (P_1) و تحقق:

$$\frac{1}{2} \cdot (-2) - 1 + 1 < 0 \text{ لأن } \frac{1}{2}x_B - y_B + 1 < 0$$

إذا أخذنا نقطة أخرى M تنتمي إلى نصف المستوى (P_2) .

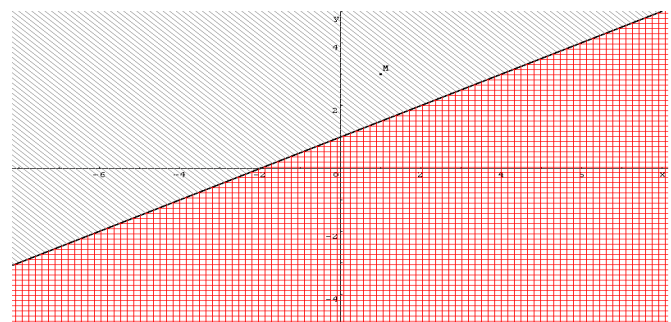
فان المتفاوتة $\frac{1}{2}x_M - y_M + 1 > 0$ محققة (يمكنك التحقق من بعض النقط).

و إذا أخذنا نقطة أخرى N تنتمي إلى نصف المستوى (P_1) .

فان المتفاوتة $\frac{1}{2}x_N - y_N + 1 < 0$ محققة.

و بالتالي كل نقطة $M(x,y)$ من (P_2) تحقق $\frac{1}{2}x - y + 1 > 0$.

و كل نقطة $M(x,y)$ من (P_1) تحقق $\frac{1}{2}x - y + 1 < 0$.



إشارة: $ax + by + c$

خاصية: نعتبر في المعلم $(o, \vec{i}, \vec{j})$ المستقيم الذي معادلته

$ax + by + c = 0$ المستقيم (D) يحدد نصفي مستوى مفتوحين:

■ أحدهما هو مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق

$$ax + by + c > 0$$

■ و الآخر هو مجموعة النقط $M(x,y)$ التي

$$ax + by + c < 0$$

كل معادلة تكتب على الشكل $ax + by + c = 0$ حيث $a \neq 0$

أو $b \neq 0$ هي معادلة مستقيم.

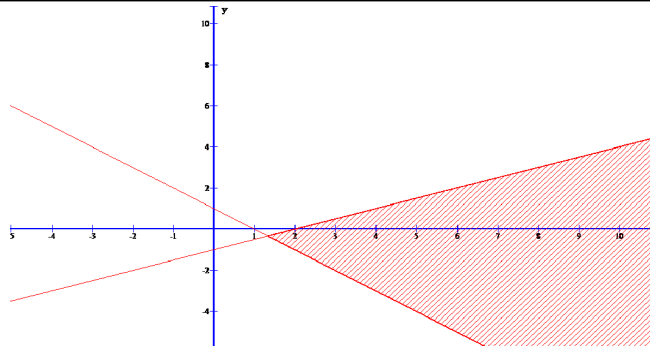
تمرين 18: حل مبيانيا النظام التالية:

$$(S_1) \begin{cases} x + y - 1 > 0 \\ -x + 2y + 2 < 0 \end{cases}$$

الجواب : نرسم أولاً المستقيمتين التالية :

$$x + y - 1 = 0; -x + 2y + 2 = 0$$

وبعد ذلك يجب الحصول على الشكل التالي وهو الحل المبيان:



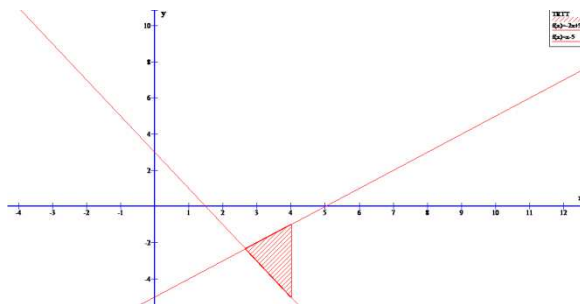
تمرين 19: حل مبيانيا النظام التالية:

$$(S) \begin{cases} 2x + y - 3 > 0 \\ -x + y + 5 < 0 \\ x < 4 \end{cases}$$

الجواب : نرسم أولاً المستقيمتين التالية :

$$2x + y - 3 = 0; -x + y + 5 = 0; x = 4$$

وبعد ذلك يجب الحصول على الشكل التالي وهو الحل المبيان:

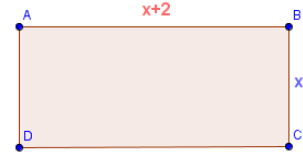


ترييض وضعيات :

تمرين 20 : أحسب طول عرض مستطيل اذا علمت أن طوله يزيد عن عرضه ب

$$2cm \text{ وأن مساحته تساوي } 15cm^2$$

الجواب



ليكن x وعرض مستطيل اذن طوله هو : $x+2$ ومنه مساحته هي :

$$S = x(x+2) = 15$$

ومنه نحصل عن معادلة من الدرجة الثانية :

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \quad : \quad a=1 \quad \text{و} \quad c=-15 \quad \text{و} \quad b=2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 64 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما :

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-2-8}{2 \times 1} = -5 < 0 \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-2+8}{2 \times 1} = 3$$

ومنه: بما أن عرض مستطيل لا يمكن أن يكون سالبا :

نأخذ $x=3$

وبالتالي طوله هو : $5cm$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

