

المعادلات و المتراجحات من الدرجة الاولى والثانية بمجهول واحد

القدرات المنتظرة

- *- حل معادلات أو متراجحات تؤول في حلها إلى معادلات أو متراجحات من الدرجة 1 أو 2 بمجهول واحد.
- *- تربيض وضعيات تتضمن مقادير متغيرة باستعمال تعابير أو معادلات أو متراجحات.

I) تعاريف أنشطة

1- حل المعادلتين التاليتين $x \in \mathbb{R} \quad 2x + 4 = 5x - \frac{1}{2}$ $K \quad x \in \mathbb{N} \quad 2x + 4 = 5x - \frac{1}{2}$

2- حل المتراجحة $x \in \mathbb{R} \quad 5x - 7 \leq \frac{11}{2}x + 4$

تعريف 1

جميع حلول معادلة (أو متراجحة) تكون مجموعة تسمى مجموعة حلول المعادلة (أو المتراجحة) نرمز لها بـ S أو S' او.....

تعريف 2

نقول ان معادلتين (أو متراجحتين) متكافئتان إذا كانت للمعادلتين (أو للمتراجحتين) نفس مجموعة الحلول.

II) المعادلة التالفية

1- مفهوم معادلة تالفية

تعريف

كل معادلة يمكن كتابتها على شكل $ax + b = 0$ $x \in \mathbb{R}$ تسمى معادلة تالفية. و تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد إذا كان $a \neq 0$

2- حل معادلة تالفية

نحل المعادلة $x \in \mathbb{R} \quad ax + b = 0$

إذا كان $a = b = 0$ فان $S = \mathbb{R}$

إذا كان $a = 0$ و $b \neq 0$ فان $S = \emptyset$

إذا كان $a \neq 0$ فان $ax + b = 0$ تكافئ $x = -\frac{b}{a}$ أي أن $S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$

3- حل المعادلة $(ax + b)(cx + d) = 0$ $x \in \mathbb{R}$ حيث $a \neq 0$ و $c \neq 0$

$(ax + b)(cx + d) = 0$ تكافئ $ax + b = 0$ أو $cx + d = 0$

إذن مجموعة حلول المعادلة $(ax + b)(cx + d) = 0$ $x \in \mathbb{R}$ هي اتحاد مجموعة حلول المعادلة

$ax + b = 0$ $x \in \mathbb{R}$ و $cx + d = 0$ $x \in \mathbb{R}$

تمرين: حل المعادلة $(2x + 1)(-3x - 5) = 0$ $x \in \mathbb{R}$

III) المتراجحات التالفية بمجهول واحد

1- تعريف

كل متراجحة يمكن كتابتها على شكل $ax + b < 0$ أو $ax + b \leq 0$ $x \in \mathbb{R}$ أو

$ax + b \geq 0$ $x \in \mathbb{R}$ أو $ax + b > 0$ $x \in \mathbb{R}$ حيث $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ، تسمى متراجحة تالفية.

و تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد إذا كان $a \neq 0$

2- حل متراجحة تالفية بمجهول واحد

أ- إشارة الحدانية $ax + b$

*- إذا كان $a = 0$ فان إشارة $ax + b$ هي إشارة b

*- إذا كان $a \neq 0$ فإن $ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$ و بالتالي إشارة $ax + b$ مرتبطة بإشارة a و $x + \frac{b}{a}$

$$x + \frac{b}{a} > 0 \quad \text{تكافئ} \quad x > -\frac{b}{a}$$

$$x + \frac{b}{a} < 0 \quad \text{تكافئ} \quad x < -\frac{b}{a}$$

نلخص هذه الدراسة في جدول يسمى جدول إشارة $ax + b$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	عكس إشارة a	0	إشارة a

تمرين

حل المتراجحتين: $x \in \mathbb{R} \quad 2x + 3 < 0$; $x \in \mathbb{R} \quad -3x + 4 \leq 0$ بطريقتين مختلفتين.

3- حل المتراجحة $x \in \mathbb{R} \quad (ax + b)(cx + d) \leq 0$ أو من نوع $x \in \mathbb{R} \quad (ax + b)(cx + d) > 0$

حل هذا النوع من المتراجحات يعتمد على دراسة إشارة $(ax + b)(cx + d)$ بتوظيف إشارة كل من $(ax + b)$ و $(cx + d)$

تمرين

حل المتراجحتين: $x \in \mathbb{R} \quad (2x + 1)(-3x + 1) < 0$; $x \in \mathbb{R} \quad (-2x - 1)(-5x + 1) \geq 0$

IV (المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد

1- تعريف

نسمي معادلة من الدرجة الثانية في $\mathbb{R}$ كل معادلة على الشكل $ax^2 + bx + c = 0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية و a غير منعدم.

2- أمثلة

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات

$$x^2 - 2x + 3 = 0 \quad , \quad x^2 - 6x - 7 = 0 \quad , \quad 2x^2 + 1 = 0 \quad , \quad x^2 - 5 = 0 \quad , \quad 3x^2 - \sqrt{3}x = 0$$

3- صفة عامة

(a) نعتبر المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $x \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$

لكل x من $\mathbb{R}$

$$\text{لدينا} \quad ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

$$\text{الكتابة} \quad a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \quad \text{يسمى الشكل القانوني لثلاثية الحدود} \quad ax^2 + bx + c$$

لنحل المعادلة

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \quad \text{تكافئ} \quad ax^2 + bx + c = 0$$

من خلال هذا يتبين أن حل المعادلة يتوقف على إشارة العدد $b^2 - 4ac$ الذي يسمى **مميز**

المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ نرسم له بـ Δ نكتب $\Delta = b^2 - 4ac$

* إذا كان $\Delta < 0$ فإن $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ و بالتالي المعادلة لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$

* إذا كان $\Delta = 0$ فإن $x + \frac{b}{2a} = 0$ أي $x = -\frac{b}{2a}$

* إذا كان $\Delta > 0$ فإن $ax^2 + bx + c = 0$ تكافئ $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$

$$\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \text{ تكافئ}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ أو } x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ تكافئ}$$

مبرهنة

نعتبر المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$ و S مجموعة حلولها في $\mathbb{R}$.
العدد $b^2 - 4ac$ يسمى مميز المعادلة أو ثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$ نرمز له بـ Δ

إذا كان $\Delta < 0$ فإن $S = \emptyset$

إذا كان $\Delta = 0$ فإن $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$

إذا كان $\Delta > 0$ فإن $S = \left\{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

اصطلاح

إذا كان $\Delta = 0$ فإن $x = -\frac{b}{2a}$ في هذه الحالة نقول إن $-\frac{b}{2a}$ حل مزدوج للمعادلة

ملاحظة إذا كان a و c لهما إشارتين مختلفتين فإن للمعادلة حلين.

تمرين

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات

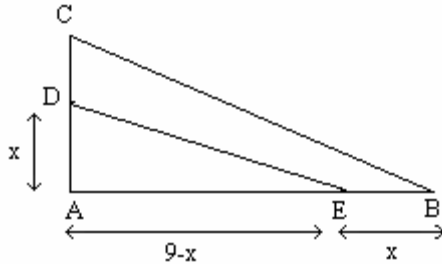
$$x^2 - (1 + \sqrt{3})x + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad 5x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0 \quad 4x^2 + 3x - 1 = 0$$

تمرين

نعتبر ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث $AB = 9$ و $AC = 4$ حدد موضع نقطتين D و E تنتميان

على التوالي لـ $[AB]$ و $[AC]$ بحيث $AD = BE$ و مساحة ADE تساوي مساحة الرباعي $BCDE$
اختيار المجهول نضع $AD = BE = x$



مساحة ADE هي $\frac{x(9-x)}{2}$

مساحة الرباعي $BCDE$ هي $\frac{4 \times 9}{2} - \frac{x(9-x)}{2}$

$$\frac{4 \times 9}{2} - \frac{x(9-x)}{2} = \frac{x(9-x)}{2} \text{ لدينا}$$

$$18 - 9x + x^2 = 0 \text{ ومنه} \dots\dots\dots$$

(b) نتيجة

نعتبر معادلة من شكل $ax^2 + 2b'x + c = 0$ و $a \neq 0$
لدينا $\Delta = 4(b'^2 - ac)$ نضع $\Delta' = b'^2 - ac$

إشارة Δ' هي إشارة Δ

إذا كان $\Delta' < 0$ فإن $S = \emptyset$

إذا كان $\Delta' = 0$ فإن $S = \left\{-\frac{b'}{a}\right\}$

إذا كان $\Delta' > 0$ فإن $S = \left\{\frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}\right\}$

العدد Δ' يسمى المميز المختصر للمعادلة

تمرين

$$x \in \mathbb{R} \quad 6x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0 \quad \text{حل}$$

4- نعمل ثلاثة الحدود

$$a \neq 0 \quad / \quad T(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{نعتبر ثلاثة الحدود}$$

ليكن Δ مميزها

* إذا كان $\Delta < 0$ فإن $T(x)$ لا تقبل جذرا و بالتالي $T(x)$ لا يمكن تعميلها في $\mathbb{R}$

$$* \text{ إذا كان } \Delta = 0 \text{ فإن } T(x) \text{ لها جذر وحيد } \frac{-b}{2a} \text{ وبالتالي } T(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

* إذا كان $\Delta > 0$ فإن $T(x)$ لها خدرين مختلفين x_1 و x_2

$$\text{وبالتالي } T(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

تمرين

$$Q(x) = x^2 - (1 + \sqrt{3})x + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P(x) = 3x^2 - 4x - 4$$

عمل

5- معادلات تؤول في حلها الى معادلات من الدرجة الثانية

$$\text{مثال 1} \quad \text{حل} \quad x \in \mathbb{R} \quad x^4 - 7x^2 + 12 = 0$$

$$\text{مثال 2} \quad \text{حل} \quad x \in \mathbb{R} \quad 2x - 7\sqrt{x} - 4 = 0$$

$$\text{مثال 3} \quad \text{نعتبر } P(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 1$$

$$\text{أحسب } P\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{حل المعادلة } P(x) = 0$$

6- مجموع و جداء جدرى ثلاثة الحدود

$$\text{نعتبر } x \in \mathbb{R} \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{حيث } a \neq 0$$

لنفترض أن $\Delta > 0$ و أن جذريها هما x_1 و x_2

لدينا لكل x من $\mathbb{R}$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

$$\text{إذن} \quad x_1x_2 = \frac{c}{a} \quad ; \quad x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

خاصة

إذا كان للمعادلة $x \in \mathbb{R} \quad ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$ حلان x_1 و x_2 فإنهما يحققان العلاقتين

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} \quad ; \quad x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

تمرين

$$\text{تأكد أن للمعادلة } 4x^2 - 7x + 5 = 0 \text{ جذران } x_1 \text{ و } x_2 \text{ ثم أحسب } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \text{ دون حساب } x_1 \text{ و } x_2$$

VI- المتراجحات من الدرجة الثانية بمجهول واحد

1- إشارة ثلاثة الحدود من الدرجة الثانية

$$a \neq 0 \quad / \quad T(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{نعتبر ثلاثة الحدود}$$

ليكن Δ مميزها

$$\text{الشكل القانوني } T(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

إذا كان $\Delta < 0$ فإن إشارة $ax^2 + bx + c$ هي إشارة a

إذا كان $\Delta = 0$ فان $ax^2 + bx + c$ يكون منعدما من أجل $x = \frac{-b}{2a}$ و إشارتها إشارة a لكل x من

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$$

إذا كان $\Delta < 0$ فان $T(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ حيث x_1 و x_2 جذري $ax^2 + bx + c$

نفترض أن $x_1 < x_2$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x - x_1$	-	0	+	+
$x - x_2$	-	-	0	+
$T(x)$	إشارة a	0	عكس إشارة a	إشارة a

خلاصة

إذا كان $\Delta < 0$ فان إشارة $ax^2 + bx + c$ هي إشارة a

إذا كان $\Delta = 0$ فان إشارة $ax^2 + bx + c$ هي إشارة a لكل x من $\mathbb{R} - \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$

إذا كان $\Delta < 0$ و x_1 و x_2 جذري $ax^2 + bx + c$ حيث $x_1 < x_2$ فان

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$T(x)$	إشارة a	0	عكس إشارة a	إشارة a

2- المتراجحات

أ- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات

$$3x^2 - 2x - 8 < 0 \quad -2x^2 + 5x - 3 \leq 0$$

$$4x^2 - 2x + 1 > 0 \quad -3x^2 + \sqrt{3}x - 1 \geq 0$$

ب- متراجحات تؤول في حلها الى متراجحات من الدرجة الثانية

مثال 1

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين

$$2x^4 - 9x^2 + 4 > 0$$

$$\frac{x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}}{x^2 - x - 2} \geq 0$$

مثال 2

نعتبر $p(x) = 6x^3 - 13x^2 + 4$

1- تأكد أن 2 جذر للحدودية $p(x)$

2- حل في $\mathbb{R}$ $p(x) \leq 0$

3- حل في $\mathbb{R}$ $p(x) \leq 3x^2(x - 2)$

تمرين

نعتبر $p(x) = -x^3 + (3+a)x^2 - (2+3a)x + 2a$

1- بين أن a جذر للحدودية $p(x)$

2- حدد حدودية $Q(x)$ حيث $p(x) = (x - a)Q(x)$

3- أدرس إشارة $-x^2 + 3x - 2$

4- ب- حل في $\mathbb{R}$ $p(x) > 0$ حيث $Q(a) > 0$