



تقارين وحلولها

تمرين 1 :

بسط الأعداد التالية :

$$A = \sqrt{12} \times \sqrt{27} + \sqrt{6\sqrt{100}+4}$$

$$B = \sqrt{17-2\sqrt{30}} \times \sqrt{17+2\sqrt{30}}$$

$$C = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{432}} + \frac{\sqrt{0,0032}}{\sqrt{0,0018}}$$

الجواب :

$$A = \sqrt{12} \times \sqrt{27} + \sqrt{6\sqrt{100}+4}$$

$$= (2\sqrt{3}) \times (3\sqrt{3}) + \sqrt{6 \times 10 + 4}$$

$$= 6\sqrt{3}^2 + \sqrt{64}$$

$$= 6 \times 3 + 8$$

$$= 18 + 8$$

$$= 26$$

$$A = 26$$

إذن

* لدينا :

$$B = \sqrt{17-2\sqrt{30}} \times \sqrt{17+2\sqrt{30}}$$

$$= \sqrt{(17-2\sqrt{30}) \times (17+2\sqrt{30})}$$

$$= \sqrt{17^2 - (2\sqrt{30})^2}$$

$$= \sqrt{289 - 120}$$

$$= \sqrt{169}$$

$$= \sqrt{13^2}$$

$$= 13$$

وبالتالي :

$$B = 13$$

$$C = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{432}} + \frac{\sqrt{0,0032}}{\sqrt{0,0018}}$$

$$C = \sqrt{\frac{27}{432}} + \sqrt{\frac{0,0032}{0,0018}}$$

$$C = \sqrt{\frac{27}{27 \times 16}} + \sqrt{\frac{32 \times 10^{-4}}{18 \times 10^{-4}}}$$

$$C = \sqrt{\frac{1}{16}} + \sqrt{\frac{16}{9}}$$

$$C = \frac{1}{4} + \frac{4}{3}$$

$$C = \frac{3+16}{12}$$

$$C = \frac{19}{12}$$

$$C = \frac{19}{12}$$

إذن

تمرين 2 :

بسط الأعداد التالية :

$$E = (\sqrt{75} - \sqrt{98}) \times (5\sqrt{3} + 7\sqrt{2})$$

$$F = (\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7}) \times (\sqrt{7} + \sqrt{5} + \sqrt{3})$$

$$G = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$$

$$H = \sqrt{11 - \sqrt{120}}$$

الجواب :

لدينا :

$$E = (\sqrt{75} - \sqrt{98}) \times (5\sqrt{3} + 7\sqrt{2})$$



$$H = \sqrt{11 - 2\sqrt{30}}$$

$$= \sqrt{11 - 2\sqrt{6} \times \sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{6}^2 + \sqrt{5}^2 - 2\sqrt{6} \times \sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{5})^2}$$

وبما أن $\sqrt{6} > \sqrt{5}$ فإن

$$H = \sqrt{6} - \sqrt{5}$$

تمرين 3 :

اجعل مقامات الخوارج الآتية اعدادا صحيحة

$$\frac{9}{\sqrt{10} + 1}, \frac{4}{3 - \sqrt{15}}$$

$$\frac{1}{2 - \sqrt{2}} + \frac{1}{2 + \sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}$$

الجواب :

لدينا :

$$\frac{9}{\sqrt{10} + 1} = \frac{9(\sqrt{10} - 1)}{(\sqrt{10} + 1)(\sqrt{10} - 1)}$$

$$= \frac{9(\sqrt{10} - 1)}{9}$$

$$= \frac{\sqrt{10} - 1}{1} = \sqrt{10} - 1$$

لدينا :

$$\frac{4}{3 - \sqrt{15}} = \frac{4(3 + \sqrt{15})}{(3 - \sqrt{15})(3 + \sqrt{15})}$$

$$= \frac{4(3 + \sqrt{15})}{(9 - 15)}$$

$$E = (\sqrt{25 \times 3} - \sqrt{49 \times 2}) \times (5\sqrt{3} + 7\sqrt{2})$$

$$E = (5\sqrt{3} - 7\sqrt{2}) \times (5\sqrt{3} + 7\sqrt{2})$$

$$E = (5\sqrt{3})^2 - (7\sqrt{2})^2$$

$$E = 75 - 98$$

$$E = -23$$

$$E = -23$$

إذن

$$F = (\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7}) \times (\sqrt{7} + \sqrt{5} + \sqrt{3})$$

$$= (\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7}) \times (\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7})$$

$$= (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{7})^2$$

$$= (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{7})^2$$

$$= 8 + 2\sqrt{15} - 7$$

$$= 1 + 2\sqrt{15}$$

$$F = 1 + 2\sqrt{15}$$

إذن

لدينا :

$$G = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{9 - 2 \cdot 2\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{5 + 4 - 2 \cdot 2\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{5}^2 + 2^2 - 2 \cdot 2\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2}$$

وبما أن $\sqrt{5} > 2$ فإن

$$G = \sqrt{5} - 2$$

لدينا :

$$H = \sqrt{11 - \sqrt{120}}$$





$$= \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(2 - \sqrt{6})}{4 - 6}$$

$$= - \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(2 - \sqrt{6})}{2}$$

تمرين 4 :

a و b عدنان حقيقيان موجبان حيث $a > b$

بسط العدد A حيث :

$$A = \sqrt{a+b+2\sqrt{a \times b}} + \sqrt{a+b-2\sqrt{a \times b}}$$

الجواب :

لدينا :

$$a+b+2\sqrt{a \times b}$$

$$= \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} + 2\sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$= (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

ولدينا كذلك :

$$a+b-2\sqrt{a \times b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

إذن :

$$A = \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} + \sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}$$

وبما أن : $a > b$

فإن : $\sqrt{a} > \sqrt{b}$

ومنه :

$$A = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$= 2\sqrt{a}$$

$$A = 2\sqrt{a}$$

$$= \frac{4(3 + \sqrt{15})}{-6}$$

$$= \frac{-2(3 + \sqrt{15})}{3}$$

لدينا :

$$\frac{1}{2 - \sqrt{2}} + \frac{1}{2 + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{1(2 + \sqrt{2}) + 1(2 - \sqrt{2})}{2 - \sqrt{2} \quad 2 + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2}}{4 - 2}$$

$$= \frac{4}{2}$$

$$= \frac{2}{1} = 2$$

لدينا :

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}{(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)}$$

$$= \frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 1^2}$$

$$= \frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{5 + 2\sqrt{6} - 1}$$

$$= \frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{4 + 2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{6}}$$

$$= \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(2 - \sqrt{6})}{(2 + \sqrt{6})(2 - \sqrt{6})}$$





$$u^2 = 20$$

ومنه $u = \sqrt{20}$ لأن $u > 0$
أي أن

$$u = 2\sqrt{5}$$

$$v^2 = (a - b)^2 \quad \text{لدينا :}$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

$$= 8 - 2\sqrt{15} - 2.2 + 8 + 2\sqrt{15}$$

$$= 12$$

$$v < 0 \quad \text{إذن} \quad v = -\sqrt{12}$$

$$v = -2\sqrt{3} \quad \text{ومنه}$$

ج - لدينا

$$\text{إذن} \quad \begin{cases} u = a + b \\ v = a - b \end{cases}$$

$$u + v = 2a$$

ومنه :

$$a = \frac{u + v}{2}$$

$$a = \frac{2\sqrt{5} - 2\sqrt{3}}{2}$$

$$a = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

$$u = a + b \quad \text{لدينا :}$$

$$b = u - a \quad \text{إذن}$$

$$b = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

$$b = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

تمرين 5 :

نعتبر العددين

$$a = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} \quad \text{و} \quad b = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$$

1 - احسب $a.b$

2 - نضع $u = a + b$ و $v = a - b$

أ - ما هي إشارة كل من u و v

ب - احسب u^2 و v^2 واستنتج u و v

ج - استنتج كتابة مبسطة لـ a و b

الجواب :

$$a.b = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} \cdot \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$$

$$= \sqrt{(8 - 2\sqrt{15})(8 + 2\sqrt{15})}$$

$$= \sqrt{8^2 - (2\sqrt{15})^2}$$

$$= \sqrt{64 - 60}$$

$$= \sqrt{4}$$

$$a.b = 2 \quad \text{إذن :}$$

2 - أ - لدينا $a > 0$ و $b > 0$ إذن $u > 0$

$$\text{لدينا : } \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} > \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$$

$$b > a$$

$$\text{إذن : } a - b < 0 \quad \text{إذن} \quad v < 0$$

ب -

$$u^2 = (a + b)^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$= 8 - 2\sqrt{15} + 2.2 + 8 + 2\sqrt{15}$$

$$= 20$$





تمرين 6 :

نعتبر العددين الحقيقيين :

$$a = \sqrt{28 - 10\sqrt{3}} \quad \text{و} \quad b = \sqrt{28 + 10\sqrt{3}}$$

$$1 - \text{احسب } (5 + \sqrt{3})^2 \quad \text{و} \quad (5 - \sqrt{3})^2$$

ثم بسط a و b

بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي t يجب تحديده

حيث :

$$(14 + 5\sqrt{3})(5 - \sqrt{3})\sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = t\sqrt{2}$$

الجواب :

1 - أ

$$\begin{aligned} (5 + \sqrt{3})^2 &= 5^2 + 2 \cdot 5\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 \\ &= 25 + 10\sqrt{3} + 3 \\ &= 28 + 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

لدينا

$$\begin{aligned} (5 - \sqrt{3})^2 &= 5^2 - 2 \cdot 5\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 \\ &= 25 - 10\sqrt{3} + 3 \\ &= 28 - 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{28 - 10\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{(5 - \sqrt{3})^2} \\ &= 5 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

لأن : $5 > \sqrt{3}$

$$a = 5 - \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{28 + 10\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{(5 + \sqrt{3})^2} \\ &= 5 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

لأن : $5 + \sqrt{3} > 0$

$$b = 5 + \sqrt{3}$$

2 لدينا

$$\begin{aligned} &(\sqrt{14 + 5\sqrt{3}})^2 (5 - \sqrt{3}) (\sqrt{14 - 5\sqrt{3}}) \\ &= (\sqrt{14 + 5\sqrt{3}})^2 \cdot (\sqrt{14 - 5\sqrt{3}}) \cdot (5 - \sqrt{3}) \\ &= (\sqrt{14 + 5\sqrt{3}}) \cdot (\sqrt{(14 + 5\sqrt{3})(14 - 5\sqrt{3})}) \cdot (5 - \sqrt{3}) \\ &= (\sqrt{14 + 5\sqrt{3}}) \cdot (\sqrt{196 - 75}) \cdot (5 - \sqrt{3}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{14 + 5\sqrt{3}} \times \sqrt{121} \cdot (5 - \sqrt{3}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{28 + 10\sqrt{3}} \times 11 \times (5 - \sqrt{3}) \\ &= \frac{11\sqrt{2}}{2} \cdot (5 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{3}) \\ &= \frac{11\sqrt{2}}{2} \times (25 - 3) \\ &= \frac{11\sqrt{2}}{2} \times (25 - 3) \\ &= \frac{11\sqrt{2}}{2} \times 22 \\ &= 121\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(14 + 5\sqrt{3})(5 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{14 - 5\sqrt{3}} \\ &= 121\sqrt{2} \end{aligned}$$

إذن $t = 121$

$$= \frac{5^4 \times 2^6}{2^{10} \times 5^6}$$

$$= \frac{1}{2^{10} \times 5^6 \times 5^{-4} \times 2^{-6}}$$

$$b = \frac{1}{2^4 \times 5^2}$$

$$C = \left(\frac{5^3 \times 2^{-3}}{4 \times 25} \right)^2 \times \frac{2^8}{10^2 \times 5}$$

$$= \frac{(5^3)^2 \times (2^{-3})^2}{(2^2)^2 \times (5^2)^2} \times \frac{2^8}{(5 \times 2)^2 \times 5}$$

$$= \frac{5^6 \times 2^{-6} \times 2^8}{2^4 \times 5^4 \times 5^2 \times 2^2 \times 5^1}$$

$$= \frac{5^6 \times 2^2}{2^6 \times 5^7}$$

$$= \frac{1}{2^6 \times 5^7 \times 5^{-6} \times 2^{-2}}$$

$$= \frac{1}{2^4 \times 5^1}$$

$$C = \frac{1}{5 \cdot 2^4}$$

لدينا :

$$d = \frac{(3^2 \times 11^5)^{-2}}{(3^{-4} \times 11^3)^3} \times \frac{(33)^{15}}{3^2 \times 11}$$

$$= \frac{(3^2)^{-2} \times (11^5)^{-2}}{(3^{-4})^3 \times (11^3)^3} \times \frac{(3 \times 11)^{15}}{3^2 \times 11^1}$$

$$= \frac{3^{-4} \times (11)^{-10} \times 3^{15} \times 11^{15}}{3^{-12} \times 11^9 \times 3^2 \times 11^1}$$

$$= \frac{3^{11} \times 11^5}{3^{-10} \times 11^{10}}$$

تمرين 7 :

أحسب ما يلي :

$$a = \left(\frac{3}{5} \right)^4 \times \left(\frac{1}{2} \right)^3 \times \left(\frac{2}{3} \right)^5$$

$$b = \left(-\frac{1}{8} \right)^2 \times \left(\frac{2}{5} \right)^6 \times \left(-\frac{5}{2} \right)^4$$

$$C = \left(\frac{5^3 \times 2^{-3}}{4 \times 25} \right)^2 \times \frac{2^8}{10^2 \times 5}$$

$$d = \frac{(3^2 \times 11^5)^{-2}}{(3^{-4} \times 11^3)^3} \times \frac{(33)^{15}}{3^2 \times 11}$$

الجواب :

$$a = \left(\frac{3}{5} \right)^4 \times \left(\frac{1}{2} \right)^3 \times \left(\frac{2}{3} \right)^5$$

$$= \frac{3^4}{5^4} \times \frac{1^3}{2^3} \times \frac{2^5}{3^5}$$

$$= \frac{3^4 \times 2^5}{5^4 \times 2^3 \times 3^5}$$

$$= \frac{3^4 \times 2^5 \cdot 2^{-3} \times 3^{-5}}{5^4}$$

$$a = \frac{2^2}{3 \cdot 5^4}$$

لدينا :

$$b = \left(-\frac{1}{8} \right)^2 \times \left(\frac{2}{5} \right)^6 \times \left(-\frac{5}{2} \right)^4$$

$$= \frac{(-1)^2}{8^2} \times \frac{2^6}{5^6} \times \frac{(-5)^4}{2^4}$$

$$= \frac{1}{(2^3)^2} \times \frac{2^6}{5^6} \times \frac{5^4}{2^4}$$

$$= \frac{1 \times 2^6 \times 5^4}{2^6 \times 5^6 \times 2^4}$$



$$A = \frac{a^2}{b} \quad \text{إذن :}$$

ب - لدينا : $a = 10^{-2}$ و $b = 10^{-3}$

$$A = \frac{a^2}{b} \quad \text{إذن :}$$

$$= \frac{(10^{-2})^2}{10^{-3}}$$

$$= \frac{10^{-4}}{10^{-3}}$$

$$A = 10^{-4} \times 10^3$$

$$A = 10^{-1}$$

$$A = \frac{1}{10}$$

$$A = \frac{1}{10}$$

2 لدينا :

$$2^m \times 3^n \times 5^k = 21600$$

$$= 216 \times 100$$

$$= 36 \times 6 \times 4 \times 25$$

$$= 6 \times 6 \times 6 \times 4 \times 25$$

$$= 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2^2 \times 5^2$$

$$= 2^3 \times 3^3 \times 2^2 \times 5^2$$

$$= 2^5 \times 3^3 \times 5^2$$

$$m = 5 \quad \text{إذن :}$$

$$n = 3 \quad \text{و}$$

$$k = 2$$

$$= \frac{3^{11} \times 3^{10}}{11^{10} \times 11^{-5}}$$

$$= \frac{3^{21}}{11^5}$$

$$d = \frac{3^{21}}{(11)^5}$$

إذن :

تمرين 8 :

أ - بسط العدد :

$$A = \frac{a^{-3} \times b(a^3 \times b^{-2})^3 \times b^6}{b^{-3} \times a^4 \times (a^2 \times b)^3 \times (a^{-3} \times b)^2}$$

ب - أحسب العدد A من أجل $a = 10^{-2}$

$$b = 10^{-3}$$

2 - حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية m و n

و k حيث :

$$2^m \times 3^n \times 5^k = 21600$$

الجواب :

1 - أ

$$A = \frac{a^{-3} \times b(a^3 \times b^{-2})^3 \times b^6}{b^{-3} \times a^4 \times (a^2 \times b)^3 \times (a^{-3} \times b)^2}$$

$$= \frac{a^{-3} \times b(a^3)^3 \times (b^{-2})^3 \times b^6}{b^{-3} \times a^4 \times (a^2)^3 \times b^3 \times (a^{-3})^2 \times b^2}$$

$$= \frac{a^{-3} \cdot b^1 \times a^9 \times b^{-6} \times b^6}{b^{-3} \times a^4 \times a^6 \times b^3 \times a^{-6} \times b^2}$$

$$= \frac{a^6 \times b^1}{a^4 \times b^2}$$

$$= \frac{a^6 \times a^{-4}}{b^2 \times b^{-1}}$$





تمرين 9 :

1 - بسط العدد :

$$A = \frac{(0,002)^4 \times 27000}{(0,0006)^3}$$

2 - استنتج حلول المعادلة

$$X^2 = \frac{(0,002)^4 \times 27000}{(0,0006)^3}$$

الجواب :

1 - لدينا :

$$A = \frac{(0,002)^4 \times 27000}{(0,0006)^3}$$

$$A = \frac{(2 \times 10^{-3})^4 \times 27 \times 10^3}{(6 \times 10^{-4})^3}$$

$$A = \frac{2^4 \times 10^{-12} \times 3^3 \times 10^3}{6^3 \times 10^{-12}}$$

$$A = \frac{2^4 \times 3^3 \times 10^{-12} \times 10^3 \times 10^{12}}{(2 \times 3)^3}$$

$$A = \frac{2^4 \times 3^3 \times 10^3}{2^3 \times 3^3}$$

$$A = 2^4 \times 2^{-3} \times 10^3$$

$$= 2^1 \times 10^3$$

$$A = 2 \times 10^3$$

$$A = 2 \times 10^3$$

إذن :

2 - لدينا :

$$X^2 = \frac{(0,002)^4 \times 27000}{(0,0006)^3}$$

تكافئ :

$$X^2 = 2 \cdot 10^3$$

$$X^2 = 2000 \quad \text{أي}$$

$$X = -\sqrt{2000} \quad \text{أو} \quad X = \sqrt{2000}$$

$$X = -\sqrt{400 \times 5} \quad \text{أو} \quad X = \sqrt{400 \times 5} \quad \text{إذن :}$$

$$X = 20\sqrt{5} \quad \text{أو} \quad X = -20\sqrt{5} \quad \text{أي أن :}$$

إذن :

$$S = \{-20\sqrt{5}, 20\sqrt{5}\}$$

تمرين 10 :

1 - حدد ثلاثة أعداد حقيقية متناسبة $z ; y ; x$

مع $\frac{1}{2}, 3, \frac{-5}{4}$ على التوالي.

2 - حدد العددين الحقيقيين a و b علما أن :

$$5a = 3b \quad \text{و} \quad 3a - 2b = 5$$

الجواب :

x و y و z متناسبة مع $\frac{1}{2}$ و 3 و $\frac{-5}{4}$

هذا الترتيب

تعني أن :

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{3} = \frac{z}{\frac{-5}{4}}$$

$$2x = \frac{y}{3} = \frac{-4z}{5}$$

$$y = 6x$$

$$-4z = 10x$$

أي أن :

إذن





الجواب :

$x, \sqrt{2} - 2, \sqrt{3}, 1 - \sqrt{2}$ متناسبة في هذا

الترتيب

$$\frac{x}{\sqrt{2} - 2} = \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{2}}$$

يعني أن

أي أن

$$(1 - \sqrt{2}).x = \sqrt{3} (\sqrt{2} - 2)$$

$$(1 - \sqrt{2}).x = -\sqrt{6} (1 - \sqrt{2}) \quad \text{إذن}$$

$$x = \frac{-\sqrt{6} (1 - \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2})} \quad \text{إذن}$$

$$x = -\sqrt{6} \quad \text{إذن}$$

a و b متناسبان مع العددين 0,1 و 0,2

$$\frac{a}{0,1} = \frac{b}{0,2} \quad \text{تعني أن}$$

$$a = \frac{0,1 \times b}{0,2}$$

$$a = \frac{b}{2}$$

$$b = 2a \quad \text{إذن}$$

$$b^2 = 4a^2 \quad \text{إذن}$$

$$a^2 + b^2 = 125 \quad \text{لدينا}$$

$$a^2 + 4a^2 = 125 \quad \text{إذن}$$

$$5a^2 = 125$$

$$a^2 = 25 \quad \text{إذن}$$

$$a = -5 \quad \text{أو} \quad a = 5$$

$$a < 0 \quad \text{فإن} \quad a = -5 \quad \text{وبما أن}$$

$$b = 2a \quad \text{لدينا}$$

أي أن :

$$\begin{cases} y = 6x \\ z = \frac{-5}{2}x \end{cases}$$

نأخذ مثلاً : $x = 2$

$$y = 12 \quad \text{و} \quad z = -5 \quad \text{إذن}$$

$$x = 2 \quad \text{و} \quad y = 12 \quad \text{و} \quad z = -5 \quad \text{إذن}$$

$$5a = 3b \quad \text{إذن} \quad a = \frac{3}{5}b \quad \text{لدينا}$$

وبما أن :

$$3a - 2b = 5$$

$$3 \cdot \frac{3}{5} - 2b = 5 \quad \text{فإن}$$

$$\frac{9}{5} - 2b = 5$$

$$\frac{9b - 10b}{5} = 5$$

$$-b = 25$$

$$\boxed{-b = 25}$$

$$a = \frac{3}{5}(-25) \quad \text{إذن}$$

$$a = 3(-5)$$

$$\boxed{a = -15}$$

تمرين 11 :

1 - حدد العدد الحقيقي x حيث الأعداد $x, \sqrt{2} - 2, \sqrt{3}$

$1 - \sqrt{2}$ متناسبة في هذا الترتيب

2 - a و b عدداً سالبان متناسبان مع العددين

و 0,1 و 0,2 حيث : $a^2 + b^2 = 125$

حدد العددين a و b





تمرين 13:

انشر واختصر

$$*(5a - 2b)^2 \quad * \left(\frac{1}{2}a + 4\right)^2$$

$$*(2a + b)^2 - (2a - b)^2$$

$$*(a + 2b)^3 - (a - 2b)^3$$

$$*(a - b + c)^2$$

الجواب :

$$(5a - 2b)^2 = (5a)^2 - 2(5a) \times (2b) + (2b)^2$$

$$= 25a^2 - 20ab + 4b^2$$

$$(5a - 2b)^2 = 25a^2 + 4b^2 - 20ab \quad \text{إذن}$$

$$\left(\frac{1}{2}a + 4\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}a\right) \times 4 + 4^2$$

$$= \left(\frac{1}{4}a\right)^2 + 4a + 16$$

$$\left(\frac{1}{2}a + 4\right)^2 = \frac{a^2}{4} + 4a + 16 \quad \text{إذن}$$

$$(2a + b)^2 - (2a - b)^2 \quad \text{لدينا}$$

$$= 4a^2 + 2 \cdot (2a) \cdot b + b^2 - (4a^2 - 2(2a) \cdot b + b^2)$$

$$= 4a^2 + 4ab + b^2 - 4a^2 + 4ab - b^2$$

$$= 4ab + 4ab$$

$$= 8a \cdot b$$

$$(2a + b)^2 - (2a - b)^2 = 8a \cdot b \quad \text{إذن}$$

لدينا

$$b = 2(-5)$$

إذن

$$b = -10$$

ومنه

تمرين 12:

a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية متناسبة مع

1, 2 و 3 على التوالي حيث :

$$a^2 + b + 2 \times (c + 8) = 0$$

حدد الأعداد a و b و c

الجواب :

a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية متناسبة مع

1, 2 و 3 على التوالي.

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$$

$$b = 2a$$

$$c = 3a$$

$$a^2 + b + 2(c + 8) = 0$$

لدينا

$$a^2 + 2a + 2(3a + 8) = 0$$

$$a^2 + 2a + 6a + 16 = 0$$

أي أن

$$a^2 + 8a + 16 = 0$$

إذن

$$(a + 4)^2 = 0$$

أي أن

$$a + 4 = 0$$

إذن

$$a = -4$$

أي أن

$$b = -8 \quad \text{و} \quad c = -12$$

ومنه

$$c = -12 \quad \text{و} \quad b = -8 \quad a = -4$$

إذن





$$= (x - 1) [2(x - 1) - 3]$$

$$= (x - 1) [2x - 2 - 3]$$

$$= (x - 1)(2x - 5)$$

$$A = (x - 1)(2x - 5)$$

إذن

$$B = x(2x - 3) + 3 - 2x$$

لدينا

$$= x(2x - 3) - 1(2x - 3)$$

$$= (2x - 3)(x - 1)$$

$$B = (2x - 3)(x - 1)$$

إذن

$$C = (4x^2 - 25) + 4x - 10$$

لدينا

$$= (2x)^2 - 5^2 + 2(2x - 5)$$

$$= (2x - 5)(2x + 5) + 2(2x - 5)$$

$$= (2x - 5)(2x + 5 + 2)$$

$$= (2x - 5)(2x + 7)$$

$$C = (2x - 5)(2x + 7)$$

إذن

$$D = x^2(x - 2) - x^3 + 8$$

$$= x^2(x - 2) - (x^3 - 8)$$

$$= x^2(x - 2) - (x^3 - 2^3)$$

$$= x^2(x - 2) - (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$= (x - 2)(x^2 - x^2 - 2x - 4)$$

$$= (x - 2)(-2x - 4)$$

$$= -2(x - 2)(x + 2)$$

$$D = -2(x - 2)(x + 2)$$

$$E = 27x^3 + 64 - 16(3x + 4)$$

$$= (3x)^3 + 4^3 - 16(3x + 4)$$

$$= (3x + 4)(9x^2 + 12x + 16 - 16)$$

$$(a + 2b)^3 = a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$$

$$(a - 2b)^3 = a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$$

$$(2a + b)^2 - (2a - b)^2$$

إذن

$$= a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3 - a^3 + 6a^2b$$

$$- 12ab^2 + 8b^3$$

$$= 12a^2b + 16b^3$$

$$= 16b^3 + 12a^2b$$

لدينا

$$(a - b + c)^2$$

$$= [(a - b) + c]^2$$

$$= (a - b)^2 + 2(a - b).c + c^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2 + 2ac - 2bc + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$

تمرين 14 :

عمل ما يلي :

$$A = 2(x - 1)^2 - 3(x - 1)$$

$$B = x(2x - 3) + 3 - 2x$$

$$C = (4x^2 - 25) + 4x - 10$$

$$D = x^2(x - 2) - x^3 + 8$$

$$E = 27x^3 + 64 - 16(3x + 4)$$

الجواب :

$$A = 2(x - 1)^2 - 3(x - 1)$$

$$= 2(x - 1) \times (x - 1) - 3(x - 1)$$



$$\begin{aligned} C &= 9x^2 - 1 + (3x - 1)^2 && \text{لدينا} \\ &= (3x)^2 - 1^2 + (3x - 1)^2 \\ &= (3x - 1)(3x + 1) + (3x - 1)(3x - 1) \\ &= (3x - 1)(3x + 1 + 3x - 1) \\ &= (3x - 1)(6x) \\ &= 6x.(3x - 1) \end{aligned}$$

$$C = 6x.(3x - 1) \quad \text{إذن}$$

$$\begin{aligned} D &= (2x - 3)^3 - x^3 - 9(x - 3) && \text{لدينا} \\ &= [(2x - 3)^3 - x^3] - 9(x - 3) \\ &= (2x - 3 - x)[(2x - 3)^2 + x(2x - 3) + x^2] - 9(x - 3) \\ &= (x - 3)(4x^2 - 12x + 9 + 2x^2 - 3x + x^2) - 9(x - 3) \\ &= (x - 3)(7x^2 - 15x + 9) - 9(x - 3) \\ &= (x - 3)(7x^2 - 15x + 9 - 9) \\ &= (x - 3)(7x^2 - 15x) \\ &= x \times (x - 3) \times (7x - 15) \end{aligned}$$

$$D = x.(x - 3) \times (7x - 15) \quad \text{إذن}$$

$$\begin{aligned} E &= x^4 + 4 && \text{لدينا} \\ &= (x^2)^2 + 2^2 \\ &= (x^2)^2 + 2^2 + 4x^2 - 4x^2 \\ &= (x^2)^2 + 2.2.x^2 + 2^2 - 4x^2 \\ &= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2 - 2x)^2(x^2 + 2 + 2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (3x + 4)(9x^2 + 12x) \\ &= (3x + 4) \times 3x (3x + 4) \\ &= 3x.(3x + 4) \times (3x + 4) \\ &= 3x.(3x + 4)^2 \end{aligned}$$

تمرين 15:

عمل ما يلي :

$$A = (3x + 1)^2 - 49$$

$$B = x^3 + 3x^2 - 27 - 9$$

$$C = 9x^2 - 1 + (3x - 1)^2$$

$$D = (2x - 3)^3 - x^3 - 9(x - 3)$$

$$E = x^4 + 4$$

$$F = 9x^2.y^3 - 3x.y^2 - 6x^3y^3 + 18xy$$

الجواب :

$$\begin{aligned} A &= (3x + 1)^2 - 49 && \text{لدينا} \\ &= (3x + 1)^2 - 7^2 \\ &= (3x + 1 - 7).(3x + 1 + 7) \\ &= (3x - 6).(3x + 8) \end{aligned}$$

$$A = (3x - 6).(3x + 8) \quad \text{إذن}$$

$$\begin{aligned} B &= x^3 + 3x^2 - 27 - 9 && \text{لدينا} \\ &= x^2(x + 3) - 9(3 + x) \\ &= (x + 3)(x - 3)(x + 3) \\ &= (x + 3)^2.(x - 3) \end{aligned}$$

$$B = (x + 3)(x - 3)^2 \quad \text{إذن}$$



$$= x^2 \times (x + 3) + 5(x + 3)$$

$$= (x + 3) \times (x^2 + 5)$$

$$B = (x + 3) \times (x^2 + 5) \quad \text{إذن}$$

$$C = x^2 + 4x + 3 \quad \text{لدينا}$$

$$= x^2 + 4x + 4 - 1$$

$$= (x + 2)^2 - 1^2$$

$$= (x + 2 - 1) \cdot (x + 2 + 1)$$

$$= (x + 1) \cdot (x + 3)$$

$$C = (x + 1)(x + 3) \quad \text{إذن}$$

$$D = x^4 + 64 \quad \text{لدينا}$$

$$= (x^2)^2 + 8^2$$

$$= (x^2)^2 + 2 \times 8 \cdot x^2 - 2 \times 8 \cdot x^2 + 8^2$$

$$= (x^2)^2 + 2 \cdot 8 \cdot x^2 + 8^2 - 16x^2$$

$$= (x^2 + 8)^2 - (4x)^2$$

$$= (x^2 + 8 - 4x)^2 - (x^2 + 8 + 4x)$$

$$= (x^2 - 4x + 8)^2 (x^2 + 4x + 8)$$

$$D = (x^2 - 4x + 8)^2 (x^2 + 4x + 8) \quad \text{إذن}$$

$$E = 4x^2 - 9y^2 - 21y + 14x \quad \text{لدينا}$$

$$= (2x)^2 - (3y)^2 - 7(3y - 2x)$$

$$= (2x - 3y) \times (2x + 3y) + 7(2x - 3y)$$

$$= (2x - 3y) \times (2x + 3y + 7)$$

$$E = (2x - 3y) \times (2x + 3y + 7) \quad \text{إذن}$$

$$= (x^2 - 2 + 2x)^2 (x^2 + 2 + 2x)$$

$$E = (x^2 - 2 + 2x)^2 (x^2 + 2 + 2x) \quad \text{إذن}$$

$$F = 9x^2 \cdot y^3 - 3x \cdot y^2 - 6x^3 y^3 + 18xy$$

$$= 3xy(3xy^2 - x^3 y - 2x^2 \cdot y^2 + 6)$$

تمرين 16:

عمل ما يلي :

$$A = (8x + 1)^2 - 9 - 3(4x - 1)$$

$$B = x^3 + 3x^2 + 15 + 5x$$

$$C = x^2 + 4x + 3$$

$$D = x^4 + 64$$

$$E = 4x^2 - 9y^2 - 21y + 14x$$

الجواب :

$$A = (8x + 1)^2 - 9 - 3(4x - 1) \quad \text{لدينا}$$

$$= (8x + 1)^2 - 3^2 - 3(4x - 1)$$

$$= (8x + 1 - 3)(8x + 1 + 3) - 3(4x - 1)$$

$$= (8x - 2)(8x + 4) - 3(4x - 1)$$

$$= 2(4x - 1)(8x + 4) - 3(4x - 1)$$

$$= (4x - 1)(16x + 8) - 3(4x - 1)$$

$$= (4x - 1)(16x + 8 - 3)$$

$$= (4x - 1)(16x + 5)$$

$$A = (4x - 1)(16x + 5) \quad \text{إذن}$$

$$B = x^3 + 3x^2 + 15 + 5x \quad \text{لدينا}$$



تمارين 17:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$\frac{x-1}{2} - \frac{1-3x}{6} = x - \frac{1}{3}$$

$$x + \frac{5}{12} - \frac{2x-1}{3} = \frac{x}{3} + \frac{3}{4}$$

$$2x - 3 + \frac{x-1}{2} = 1 - \frac{2x-3}{3}$$

$$2(x-1) = (1+x)\sqrt{3}$$

$$x + \frac{x^2-2}{x+\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

الجواب :

$$\frac{x-1}{2} - \frac{1-3x}{6} = x - \frac{1}{3}$$

لدينا

$$\frac{3(x-1)}{6} - \frac{1-3x}{6} = \frac{6x}{6} - \frac{2}{6}$$

أي أن

$$\frac{3(x-1) - (1-3x)}{6} = \frac{6x-2}{6}$$

إذن

$$3(x-1) - (1-3x) = 6x-2$$

أي أن

$$3x - 3 - 1 + 3x = 6x - 2$$

$$6x - 4 = 6x - 2$$

إذن

$$6x - 6x = -2 + 4$$

$$0 = 2$$

$$S = \emptyset$$

إذن

$$x + \frac{5}{12} - \frac{2x-1}{3} = \frac{x}{3} + \frac{3}{4}$$

لدينا

$$\frac{12x}{12} + \frac{5}{12} - \frac{4(2x-1)}{12} = \frac{4x}{12} + \frac{9}{12}$$

أي أن

$$\frac{12x + 5 - 4(2x-1)}{12} = \frac{4x+9}{12}$$

أي أن

$$12x + 5 - 8x + 4 = 4x + 9$$

أي أن

$$4x + 9 = 4x + 9$$

$$4x - 4x = 9 - 9$$

$$0x = 0$$

$$S = \mathbb{R}$$

إذن

$$2x - 3 + \frac{x-1}{2} = 1 - \frac{2x-3}{3}$$

لدينا

$$\frac{6(2x-3)}{6} + \frac{3(x-1)}{6} = \frac{6}{6} - \frac{2(2x-3)}{3}$$

$$6(2x-3) + 3(x-1) = 6 - 2(2x-3)$$

$$12x - 18 + 3x - 3 = 6 - 4x - 6$$

$$15x - 21 = 12 - 4x$$

$$15x - 4x = 12 - 21$$

$$19x = 33$$

$$x = \frac{33}{19}$$

$$S = \left\{ \frac{33}{19} \right\}$$

إذن

$$2(x-1) = (1+x)\sqrt{3}$$

لدينا

$$2x - 2 = \sqrt{3} + x\sqrt{3}$$

$$2x - x\sqrt{3} = \sqrt{3} + 2$$

$$(2 - \sqrt{3}) \cdot x = 2 + \sqrt{3}$$

$$x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

$$x = \frac{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}$$





الجواب :

نعتبر

$$(E) : \frac{13}{2x-1} = \frac{-7}{4}$$

$$\sqrt{3} \quad D_E = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \quad \text{لدينا}$$

$$13 \times 4 = -7(2x - 1) \quad \text{لدينا (E) تكافئ}$$

$$52 = -14x + 7 \quad \text{أي أن}$$

$$14x = 7 - 52 \quad \text{أي أن}$$

$$14x = -45$$

$$x = -\frac{45}{14}$$

$$S = \left\{ -\frac{45}{14} \right\} \quad \text{إذن}$$

$$(x-3)(2x-1) + 2(x^2-9) = (x-3)^2 \quad \text{لدينا}$$

يعني :

$$(x-3)(2x-1) + 2(x-3)(x+3) - (x-3)^2 = 0$$

أي أن

$$(x-3)(2x-1) + (x-3)(2x+6) - (x-3)$$

$$(x-3) = 0$$

$$(x-3)(2x-1+2x+6-x+3) = 0$$

$$(x-3)(3x+8) = 0 \quad \text{أي أن}$$

$$x-3=0 \quad \text{أو} \quad 3x+8=0 \quad \text{أي أن}$$

$$x=3 \quad \text{أو} \quad x=-\frac{8}{3} \quad \text{إذن}$$

$$S = \left\{ 3, -\frac{8}{3} \right\} \quad \text{ومنه}$$

$$(x-3)(2x+5)^2 = (x+5)(2x-3)^2 \quad \text{لدينا}$$

يعني

$$x = \frac{(2+\sqrt{3})^2}{4-3}$$

$$x = (2+\sqrt{3})^2$$

$$S = \{(2+\sqrt{3})^2\} \quad \text{إذن}$$

$$(E) : x + \frac{x^2-2}{x+\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$D_E = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}\}$$

(E) تكافئ

$$x + \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x+\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$x + x - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$2x = 2\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \notin DE \quad \text{فإن} \quad \text{وبما أن}$$

$$S = \emptyset$$

تمرين 18 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$* \frac{13}{2x-1} = \frac{-7}{4}$$

$$* (x-3)(2x-1) + 2(x^2-9) = (x-3)^2$$

$$* (x-3)(2x+5)^2 = (x+5)(2x-3)^2$$

$$* \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}$$

$$* \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2 - \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^2 = 0$$





وبما أن $0 \in D_E$ فإن $S = \{0\}$

نعتبر $(E'') : \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2 = 0$

$D_{E''} = \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$

$\left(\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+2}\right)\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+2}\right) = 0 \quad (E'')$

$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+2} = 0$ أي أن

أو $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+2} = 0$

أي أن

$\frac{(x+1)(x+2) + (x-1)(x-1)}{(x-1)(x+2)} = 0$

أو $\frac{(x+1)(x+2) - (x-1)(x-1)}{(x-1)(x+2)} = 0$

تكافئ $(x+1)(x+2) + (x-1)^2 = 0$

أو $(x+1)(x+2) - (x-1)^2 = 0$

تكافئ $2x^2 + x + 3 = 0$ أو $5x + 1 = 0$

$x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ أو $5x = -1$

$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{16} = 0$ أو $x = -\frac{1}{5}$

لا يمكن $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{23}{16}$

إذن $S = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$

تمارين 19:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

* $4x^2 - 81 + (x-3)(2x+9) = 0$

* $(3-2x)^2 - (2x-3)(4x-5) = 0$

$(x-3)(4x^2 + 20x + 25) = (x+5)(4x^2 - 12x + 9)$

تكافئ

$4x^3 + 8x^2 - 35x - 75 - 4x^3 + 8x^2 - 51x + 45$

أي أن

$-35x - 75 = -51x + 45$

$-35x + 51x = 75 + 45$

$16x = 120$

$x = \frac{120}{16}$

$x = \frac{15}{2}$

أي أن

$S = \left\{\frac{15}{2}\right\}$ ومنه

التعتبر

$(E) \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}$

لدينا $D_E = \mathbb{R} \setminus \{1, -1, -2, 2\}$

(E) تكافئ

$\frac{x-1+x+1}{x^2-1} = \frac{x+2-x-1}{x^2-4}$

$\frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2-4}$

أي أن

$2x(x^2-4) = 2x(x^2-1)$

أي أن $x(x^2-4) = x(x^2-1)$

$x^3 - 4x = x^3 - x$

أي أن $x^3 - x^3 - 4x + x = 0$

$-3x = 0$

أي أن $x = 0$





$$2x(4x^2 - 1) = 0$$

أي أن

$$2x(2x - 1)(2x + 1) = 0$$

أي أن

يعني أن

$$2x = 0 \text{ أو } 2x - 1 = 0 \text{ أو } 2x + 1 = 0$$

$$x = 0 \text{ أو } x = \frac{1}{2} \text{ أو } x = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \notin D_E$$

وبما أن

$$S = \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\}$$

فإن

$$(E') \quad \frac{x^2 - 1}{3x} = 1 + x$$

لدينا

$$D_{E'} = \mathbb{R}^*$$

لدينا

$$x^2 - 1 = 3x(x + 1)$$

(E') تكافئ

$$(x + 1)(x - 1) = 3x(x + 1)$$

تكافئ

$$(x + 1)(x - 1 - 3x) = 0$$

يعني

$$(x + 1)(-2x - 1) = 0$$

يعني

$$x + 1 = 0 \text{ أو } -2x - 1 = 0$$

يعني

$$x = -1 \text{ أو } x = -\frac{1}{2}$$

يعني

$$S = \left\{ -1, -\frac{1}{2} \right\}$$

تمرين 20

حل في المجموعة $\mathbb{Z}$:

$$* 3^{4x+2} = 27 \times 3^{2x+3}$$

$$* \frac{5^n}{75} = \frac{5}{3 \times 5^{2n}}$$

$$* 2^{x+4} + 2^x + 2^{x+3} = 200$$

$$* \frac{8x^3 - 2x}{1 + 2x} = 0$$

$$* \frac{x^2 - 1}{3x} = 1 + x$$

الجواب :

$$4x^2 - 81 + (x - 3)(2x + 9) = 0 \quad \text{لدينا}$$

$$(2x)^2 - 9^2 + (x - 3)(2x + 9) = 0 \quad \text{أي أن}$$

$$(2x - 9)(2x + 9) + (x - 3)(2x + 9) = 0 \quad \text{أي أن}$$

$$(2x + 9)(2x - 9 + x - 3) = 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$(2x + 9)(3x - 12) = 0 \quad \text{يعني :}$$

$$2x + 9 = 0 \text{ أو } 3x - 12 = 0 \quad \text{أي أن}$$

$$2x = -9 \text{ أو } 3x = 12 \quad \text{يعني}$$

$$x = -\frac{9}{2} \text{ أو } x = 4 \quad \text{يعني}$$

$$S = \left\{ -\frac{9}{2}, 4 \right\} \quad \text{إذن}$$

$$(3 - 2x)^2 - (2x - 3)(4x - 5) = 0 \quad \text{لدينا}$$

$$(2x - 3)^2 - (2x - 3)(4x - 5) = 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$(2x - 3)(2x - 3 - 4x + 5) = 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$(2x - 3)(-2x + 2) = 0 \quad \text{يعني}$$

$$2x - 3 = 0 \text{ أو } -2x + 2 = 0 \quad \text{يعني}$$

$$2x = 3 \text{ أو } -2x = 2 \quad \text{يعني}$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ أو } x = 1 \quad \text{يعني}$$

$$S = \left\{ 1, \frac{3}{2} \right\} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{8x^3 - 2x}{1 + 2x} = 0$$

نعتبر

$$D_E = \mathbb{R} - \left\{ 1, -\frac{1}{2} \right\}$$

$$8x^3 - 2x = 0$$

(E) تكافئ



$$2^4 \cdot 2^x + 2^x + 2^3 \cdot 2^x = 200 \quad \text{يعني}$$

$$2^x(2^4 + 1 + 2^3) = 200 \quad \text{يعني}$$

$$(16 + 1 + 8) \cdot 2^x = 200 \quad \text{يعني}$$

$$25 \cdot 2^x = 200 \quad \text{يعني}$$

$$2^x = \frac{200}{25} \quad \text{يعني}$$

$$2^x = 8 \quad \text{يعني}$$

$$2^x = 2^3 \quad \text{يعني}$$

$$x = 3 \quad \text{إذن}$$

$$3 \in \mathbb{Z} \quad \text{لأن } S = \{3\} \quad \text{ومنه}$$

تمرين 21:

نعتبر المعادلة :

$$(E) : 2(m - x) + 5x \cdot m = m + 3x$$

حيث m بارامتر حقيقي.

$$1 - \text{ حل المعادلة (E) من أجل } m = \frac{3}{5}$$

$$2 - \text{ حدد قيمة العدد الحقيقي } m \text{ إذا كانت (E)}$$

تقبل حلا يساوي (-1)

$$3 - \text{ حل وناقش المعادلة (E) حسب قيم البارامتر } m$$

الجواب :

$$m = \frac{3}{5} \quad \text{لدينا}$$

(E) تصبح

$$2\left(\frac{3}{5} - x\right) + 5x \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} + 3x$$

$$\frac{6}{5} - 2x + 3x = \frac{3}{5} + 3x \quad \text{يعني}$$

الجواب :

$$3^{4x+2} = 27 \times 3^{2x+3} \quad \text{لدينا}$$

$$3^{4x+2} = 3^3 \times 3^{2x+3}$$

$$3^{4x+2} = 3^{3+2x+3} \quad \text{أي أن}$$

$$3^{4x+2} = 3^{2x+6} \quad \text{تكافئ}$$

$$4x + 2 = 2x + 6 \quad \text{أي أن}$$

$$4x - 2x = 6 - 2$$

$$2x = 4 \quad \text{يعني}$$

$$x = 2 \quad \text{يعني}$$

$$\text{وبما أن } 2 \in \mathbb{Z} \quad \text{فإن}$$

$$S = \{2\}$$

$$\frac{5^x}{75} = \frac{5}{3 \times 5^{2x}} \quad \text{لدينا}$$

$$5^x \times 3 \times 5^{2x} = 75 \times 5 \quad \text{تكافئ}$$

$$5^{3x} \times 3 = 3 \times 25 \times 5 \quad \text{تكافئ}$$

$$5^{3x} = 5^2 \times 5^1 \quad \text{تكافئ}$$

$$5^{3x} = 5^3 \quad \text{تكافئ}$$

$$3x = 3 \quad \text{أي أن}$$

$$x = 1 \quad \text{يعني}$$

$$\text{وبما أن } 1 \in \mathbb{Z} \quad \text{فإن}$$

$$S = \{1\}$$

$$2^{x+4} + 2^x + 2^{x+3} = 200 \quad \text{لدينا}$$



إذا كان $m - 1 = 0$ أي $m = 1$

فإن المعادلة تكافئ

$$x0 = -1$$

$$0 = -1$$

يعني

وهذا غير ممكن إذن

$$S = \emptyset$$

تمرين 22:

نعتبر المعادلة

$$\frac{1}{x-1} = \frac{m^2}{mx-1}$$

حيث m عدد حقيقي

1 - حدد حسب قيم m مجموعة التعريف

2 - أ - حل المعادلة إذا كان $m = 0$

ب - حل المعادلة إذا كان $m = 1$

3 - حل المعادلة إذا كان $m \neq 0$ أو $m \neq 1$

الجواب :

1 - مجموعة تعريف (E) إذا كانت $m = 0$ فإن

$$\frac{1}{x-1} = 0 \quad (E) \text{ تصبح}$$

$$D_E = \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad \text{إذن}$$

إذا كانت $m \neq 0$ فإن

$$D_E = \mathbb{R} \setminus \left\{1, \frac{1}{m}\right\}$$

2 - أ - $m = 0$ إذن (E) تصبح

$$\frac{1}{x-1} = 0$$

$$1 = 0 \times (x-1) \quad \text{أي أن}$$

$$1 = 0$$

$$S = \emptyset$$

$$-2x + 3x - 3x = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}$$

يعني

$$-2x = -\frac{3}{5}$$

يعني

$$x = \frac{3}{10}$$

يعني

$$S = \left\{\frac{3}{10}\right\}$$

إذن

لدينا (-1) حلا للمعادلة (E)

تعني أن :

$$2(m+1) - 5m = m - 3$$

$$2m + 2 - 5m = m - 3$$

يعني

$$-3m + 2 = m - 3$$

يعني

$$-3m - m = -3 - 2$$

يعني

$$-3m = -5$$

يعني

$$m = \frac{5}{4}$$

أي

(E) تكافئ

$$2m - 2x + 5x.m = m + 3x$$

$$-2x + 5x.m - 3x = m - 2m$$

تكافئ

$$5x.m - 5x = -m$$

تكافئ

$$(5m - 5).x = -m$$

يعني

$$5(m - 1).x = -m$$

يعني

إذا كانت $m - 1 \neq 0$ أي أن $m \neq 1$

$$x = \frac{-m}{5(m-1)}$$

فإن

$$x = \frac{m}{5(1-m)}$$

$$S = \left\{\frac{m}{5(1-m)}\right\}$$

إذن



الجواب :

1- نعتبر الموضوعة التالية :

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - 4x - 15 & x - 3 \\ -3x^2 + 9x & 3x + 5 \\ \hline 0 & 5x - 15 \\ & -5x + 15 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

إذن $3x^2 - 4x - 15 = (x - 3)(3x + 5)$

2- نعتبر الموضوعة التالية :

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 6 & x + 1 \\ -3x^4 - 3x^3 & 3x^3 - x^2 + 6x - 6 \\ \hline 0 & -x^3 + 5x^2 - 6 \\ & +x^3 + x^2 \\ \hline 0 & 6x^2 - 6 \\ & -6x^2 - 6x \\ \hline 0 & -6x - 6 \\ & +6x + 6 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

إذن : $P(x) = (x + 1)(3x^3 - x^2 + 6x - 6)$

3- نعتبر الموضوعة التالية :

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 4x^2 + 2x - 36 & x + 2 \\ -2x^3 - 4x^2 & 2x^2 - 8x + 18 \\ \hline 0 & -8x^2 + 2x - 36 \\ & +8x^2 + 16x \\ \hline 0 & 18x - 36 \\ & -18x - 36 \\ \hline & -72 \end{array}$$

ب - $m = 1$ فإن (E) تكافئ $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$

أي أن $x - 1 = x - 1$

أي أن $x - x = -1 + 1$

$0x = 0$

إذن $S = \mathbb{R} \{1\}$

3- إذا كانت $m \neq 0$ و $m \neq 1$ فإن (E)

تكافئ $mx - 1 = m^2 \cdot x - m^2$

$mx - m^2x = -m^2 + 1$

أي أن $m^2x - mx = m^2 - 1$

$(m^2 - m) \cdot x = m^2 - 1$

أي أن $m(m - 1)x = (m - 1)(m + 1)$

وبما أن $m \neq 1$ و $m \neq 0$

فإن $m(m - 1) \neq 0$

ومنه $x = \frac{(m - 1)(m + 1)}{m(m - 1)}$

إذن $x = \frac{(m + 1)}{m}$

إذن $S = \left\{ \frac{(m + 1)}{m} \right\}$

تمرين 23 :

أعز القسمية الاقليدية لـ $P(x)$ على $x - \alpha$ في كل حالة :

1 - $P(x) = 3x^2 - 4x - 15$; $\alpha = 3$

2 - $P(x) = 3x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 6$; $\alpha = -1$

3 - $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 36$; $\alpha = -2$

4 - $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$; $\alpha = -\frac{3}{2}$





إذن :

$$P(x) = (x + 2)(2x^2 - 8x + 18) - 72$$

4 - نعتبر الموضوعة التالية :

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 - 4x + 3 \\ -2x^3 - 3x^2 \\ \hline 0 -4x^2 - 4x + 3 \\ +4x^2 + 6x \\ \hline 0 \quad 2x + 3 \\ -2x - 3 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x + \frac{3}{2} \\ \hline 2x^2 - 4x + 2 \end{array}$$

إذن :

$$\begin{aligned} P(x) &= (x + \frac{3}{2})(2x^2 - 4x + 2) \\ &= 2(x + \frac{3}{2})(x^2 - 2x + 1) \\ &= (2x + 3)(x - 1)^2 \end{aligned}$$

تمرين 24 :

1) نعتبر الحدودية

$$P(x) = (x^3 + 2x^2 - 3x)$$

- حسب $P(-3)$ ثم استنتج تعميلا

- لـ $P(x)$ عوامله حدوديات من الدرجة الأولى
نعتبر الحدودية

$$P(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$$

أ - أحسب $P(3)$

ب - استنتج تعميلا لـ $P(x)$ تكون عوامله
حدوديات من الدرجة الأولى.

الجواب :

$$1 - \text{ لدينا } P(-3) = (-3)^3 + 2(-3)^2 - 3(-3)$$

$$= -27 + 18 + 9$$

$$= -27 + 27$$

$$P(-3) = 0 \quad \text{إذن :}$$

لدينا $P(-3) = 0$ إذن $P(x)$ يقبل القسمة على

$$(x + 3)$$

نعتبر الموضوعة التالية :

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 3x \\ -x^2 - 3x^2 \\ \hline 0 -x^2 - 3x \\ +x^2 + 3x \\ \hline 0 \quad 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x + 3 \\ \hline x^2 - x \end{array}$$

$$P(x) = (x + 3)(x^2 - x) \quad \text{إذن :}$$

$$= (x + 3)x.(x - 1)$$

$$P(x) = x.(x - 1)(x + 3) \quad \text{ومنه}$$

2 - لدينا

$$أ - \quad P(3) = 3^3 + 3^2 - 8.3 - 12$$

$$= 27 + 9 - 24 - 12$$

$$= 36 - 36$$

$$= 0$$

$$\text{إذن } P(3) = 0$$





$$P(x^2) = 0$$

أ -

$$P(\sqrt{x}) = 0$$

ب -

الجواب :

$$P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$$

1 - أ - لدينا

$$P(3) = 3^3 - 5 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 24$$

$$= 27 - 45 - 6 + 24$$

$$= 51 - 51$$

$$= 0$$

إذن 3 جذر للحدودية $P(x)$

ب - نعتبر الموضوعة التالية :

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 - 2x + 24 \\ -x^3 + 3x^2 \\ \hline 0 - 2x^2 - 2x + 24 \\ +2x^2 - 6x \\ \hline 0 - 8x + 24 \\ +8x - 24 \\ \hline 0 \quad 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x - 3 \\ \hline x^2 - 2x - 8 \end{array}$$

$$P(3) = (x - 3)(x^2 - 2x - 8) \quad \text{إذن}$$

$$Q(x) = x^2 - 2x - 8 \quad \text{إذن}$$

$$(x + 2)(x - 4) = \quad \text{ج - لدينا}$$

$$= x^2 - 4x + 2x - 8$$

$$= x^2 - 2x - 8 = Q(x)$$

ب - لدينا $P(3) = 0$ إذن $P(x)$ تقبل القسمة

على $x - 3$

نعتبر الموضوعة التالية :

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 - 8x - 12 \\ -x^3 + 3x^2 \\ \hline 0 \quad 4x^2 - 8x - 12 \\ -4x^2 + 12x \\ \hline 0 \quad 4x - 12 \\ -4x + 12 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x - 3 \\ \hline x^2 + 4x + 4 \end{array}$$

$$P(x) = (x - 3)(x^2 - 4x + 4) \quad \text{إذن}$$

$$= (x - 3)(x + 2)^2$$

$$P(x) = (x - 3)(x + 2)(x + 2)$$

تمرين 25 :

نحصر الحدودية التالية :

$$P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$$

$$P(x) \quad \text{أ - بين أن 3 جذر للحدودية}$$

ب - حدد الحدودية $Q(x)$ حيث

$$P(x) = (x - 3)Q(x)$$

$$Q(x) = (x + 2)(x - 4) \quad \text{ج - بين أن}$$

تم استنتاج تعميلا لـ $P(x)$

2 - حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين التاليتين





تمرين 26:

نعتبر الحدودية

$$P(x) = x^3 + 2ax^2 + bx + 4b$$

1 - حدد العددين الحقيقيين a و b إذا علمت أن

$P(x)$ تقبل القسمة على $(x - 1)$ و $(x + 1)$

2 - أكتب $P(x)$ على شكل جداء حدوديات

درجتها 1

3 - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة

$$P(x) = 3 - 3x^2$$

الجواب :

لدينا $P(x)$ تقبل القسمة على $(x - 1)$ و $(x + 1)$

تعني أن $P(1) = 0$ و $P(-1) = 0$

$$\begin{cases} 1 + 2a + b + 4b = 0 \\ -1 + 2a - b + 4b = 0 \end{cases} \quad \text{أي أن}$$

$$\begin{cases} 2a + 5b = -1 \\ 2a + 3b = 1 \end{cases} \quad \text{أي أن}$$

$$(2a + 5b) - (2a + 3b) = -2 \quad \text{إذن}$$

$$2b = -2 \quad \text{إذن}$$

$$b = -1 \quad \text{ومنه}$$

$$2a - 5 = -1 \quad \text{إذن} \quad 2a + 5b = -1 \quad \text{لدينا}$$

$$2a = 4 \quad \text{أي أن}$$

$$\boxed{b = -1} \quad \text{و} \quad \boxed{a = 2} \quad \text{إذن}$$

$$P(x) = x^3 + 2ax^2 + bx + 4b \quad \text{لدينا} \quad 2$$

$$Q(x) = (x + 2)(x - 4) \quad \text{إذن}$$

$$P(x) = (x - 3) \cdot Q(x) \quad \text{و}$$

$$= (x - 3)(x + 2)(x - 4)$$

$$P(x) = (x + 2)(x - 3)(x - 4) \quad \text{إذن}$$

$$P(x^2) = 0 \quad -2 - أ$$

$$(x^2 + 2)(x^2 - 3)(x^2 - 4) = 0 \quad \text{تكافئ}$$

أي أن

$$x^2 - 4 = 0 \quad \text{أو} \quad x^2 - 3 = 0 \quad \text{أو} \quad x^2 + 2 = 0$$

$$\text{إذن} \quad x^2 = 4 \quad \text{أو} \quad x^2 = 3 \quad \text{أو} \quad x^2 = -2$$

$$\text{أي أن} \quad x^2 = 4 \quad \text{أو} \quad x^2 = 3 \quad \text{لا يمكن}$$

$$x = \sqrt{3} \quad \text{أو} \quad x = -\sqrt{3} \quad \text{يعني أن}$$

$$x = \sqrt{4} \quad \text{أو} \quad x = -\sqrt{4} \quad \text{أو}$$

$$x = 2 \quad \text{أو} \quad x = -2 \quad \text{أو} \quad x = \sqrt{3} \quad \text{أو} \quad x = -\sqrt{3}$$

$$S = \{-2, 2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\} \quad \text{إذن}$$

$$P(\sqrt{x}) = 0 \quad \text{ب -}$$

$$(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 4) = 0 \quad \text{يعني أن}$$

$$\sqrt{x} - 4 = 0 \quad \text{أو} \quad \sqrt{x} - 3 = 0 \quad \text{أو} \quad \sqrt{x} + 2 = 0$$

أي أن

$$\sqrt{x} = 4 \quad \text{أو} \quad \sqrt{x} = 3 \quad \text{أو} \quad \sqrt{x} = -2$$

لا يمكن

$$\text{إذن} \quad \sqrt{x}^2 = 4^2 \quad \text{أو} \quad \sqrt{x}^2 = 3^2$$

$$\text{أي أن} \quad x = 16 \quad \text{أو} \quad x = 9$$

$$S = \{9, 16\} \quad \text{ومنه}$$



ومنه $x - 1 = 0$ أو $x + 1 = 0$ أو $x + 7 = 0$

أي أن $x = 1$ أو $x = -1$ أو $x = -7$

إذن $S = \{-1, 1, -7\}$

تمرين 27:

نعتبر الحدودية

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

1 - احسب $P(2)$ ماذا تستنتج ؟

2 - حدد الأعداد الحقيقية a و b و c حيث

$$P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$$

3 - أ - بين أن :

$$x \in \mathbb{R} : P(x) + (x - 2) = (x - 2)^3$$

ب - استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلة

$$8P(x) + 8(x - 2) = 1$$

الجواب :

1 - لدينا $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$$P(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - 6$$

$$= 8 - 24 + 22 - 6$$

$$= 30 - 30$$

$$= 0$$

إذن $P(2) = 0$ ومنه 2 جذر للحدودية $P(x)$

2 - بما أن 2 جذر لـ $P(x)$ فإن $P(x)$ تقبل

القسمة على $(x - 2)$

نعتبر الموضوعة التالية :

$P(x)$ تقبل القسمة على $x - 1$

نعتبر الموضوعة التالية :

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 4x^2 - x - 4 & x - 1 \\ -x^3 + x^2 & \\ \hline 0 & 5x^2 - x - 4 \\ -5x^2 + 5x & \\ \hline 0 & 4x - 4 \\ -4x + 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

إذن

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + 5x + 4)$$

نعتبر الموضوعة التالية :

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 5x + 4 & x + 1 \\ -x^2 - x & \\ \hline 0 & 4x + 4 \\ -4x - 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4) \quad \text{إذن}$$

$$P(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 4)$$

$$P(x) = 3 - 3x^2 \quad \text{لدينا} \quad 3 -$$

تكافئ :

$$(x - 1)(x + 1)(x + 4) = -3(-1 + x^2)$$

$$(x^2 - 1)(x + 4) + 3(x^2 - 1) = 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$(x^2 - 1)(x + 4 + 3) = 0 \quad \text{أي أن}$$

$$(x - 1)(x + 1)(x + 7) = 0 \quad \text{إذن}$$



$$x = \frac{5}{2}$$

يعني

$$S = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$

وبالتالي

تمرين 28:

نعتبر الحدوديتين التاليتين

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

و

$$Q(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

1 - أحسب $P(1)$ ثم عمل الحدودية $P(x)$

2 - أ- بين أن $Q(x) = -P(-x)$

ب - استنتج تعميلا لـ $Q(x)$

3 - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة

$$Q(\sqrt{x}) = 0$$

4 - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة

$$\frac{P(x) + Q(x)}{P(x) - Q(x)} = x$$

الجواب :

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

لدينا

$$P(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4$$

$$= 4 - 4$$

$$= 0$$

إذن $P(x)$ تقبل القسمة على $x - 1$

نعتبر الموضوعة التالية :

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 - 11x - 6 & x - 2 \\ -x^3 - 2x^2 & \\ \hline 0 & -4x^2 + 11x \\ & +4x^2 - 8x \\ \hline 0 & +3x - 6 \\ & -3x + 6 \\ \hline 0 & \end{array}$$

إذن $P(x) = (x - 2)(x^2 - 4x + 3)$

ومنه $a = 1$ و $b = -4$ و $c = 3$

3 - أ- لدينا $P(x) + (x - 2)$

$$= (x - 2)(x^2 + 4x + 3) + (x - 2)$$

$$= (x - 2)(x^2 - 4x + 3 + 1)$$

$$= (x - 2)(x^2 - 4x + 4)$$

$$= (x - 2)(x - 2)^2$$

$$= (x - 2)^3$$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$

ب - $P(x) + (x - 2) = (x - 2)^3$

$$8P(x) + 8(x - 2) = 1$$

لدينا

$$8[P(x) + (x - 2)] = 1$$

تعني

$$8(x - 2)^3 = 1$$

أي أن

$$(x - 2)^3 = \frac{1}{8}$$

أي أن

$$(x - 2)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

ومنه

$$x - 2 = \frac{1}{2}$$

أي أن

$$x = 2 + \frac{1}{2}$$



تعني أن $\sqrt{x} = -1$ أو $\sqrt{x} - 2 = 0$ لا يمكن

$$\sqrt{x} = 2$$

يعني

$$x = 4$$

يعني

$$S = \{4\}$$

إذن

$$\frac{P(x) + Q(x)}{P(x) - Q(x)} = x \quad \text{4 - لدينا}$$

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 4 + x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 + 3x^2 - 4 - x^3 + 3x^2 - 4} = x \quad \text{تكافئ}$$

$$\frac{2x^3}{6x^2 - 8} = x$$

أي أن

$$\frac{x^3}{3x^2 - 4} = x$$

أي أن

$$x^3 = (3x^2 - 4).x$$

يعني أن

$$x^3 - (3x^2 - 4).x = 0$$

تكافئ

$$x[x^2 - (3x^2 - 4)] = 0$$

$$x(4 - 2x^2) = 0$$

أي أن

$$x = 0 \quad \text{أو} \quad -2x^2 + 4 = 0$$

إذن

$$x = 0 \quad \text{أو} \quad x^2 = 2$$

يعني

$$x = 0 \quad \text{أو} \quad x = \sqrt{2} \quad \text{أو} \quad x = -\sqrt{2}$$

أي

$$S = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

ومنه

تمرين 29

حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظمات التالية ثم أول هندسيا
النتيجة المحصل عليها المستوى (P) منسوب إلى
معلم متعامد منظم $(0, \vec{i}, \vec{j})$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 4 & x - 1 \\ -x^3 + x^2 & x^2 + 4x + 4 \\ \hline 0 & 4x^2 - 4 \\ -4x^2 + 4x & \\ \hline 0 & 4x - 4 \\ -4x + 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + 4x + 4) \quad \text{إذن}$$

$$= (x - 1)(x + 2)^2$$

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)^2 \quad \text{إذن}$$

$$-P(-x) = [(x)^3 + 3(-x)^2 - 4]$$

$$= -(-x^3 + 3x^2 - 4)$$

$$= x^3 - 3x^2 + 4$$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$

$$Q(x) = -P(-x)$$

ب - لدينا

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)^2$$

$$P(-x) = (-x - 1)(-x + 2)^2 \quad \text{إذن}$$

$$= -(x + 1)(x - 2)^2$$

$$-P(-x) = (x + 1)(x - 2)^2$$

$$Q(x) = (x + 1)(x - 2)^2 \quad \text{ومنه}$$

$$Q(\sqrt{x}) = 0$$

- 3

$$(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)^2 = 0$$

$$\sqrt{x} + 1 = 0 \quad \text{أو} \quad (\sqrt{x} - 2)^2 = 0$$





$$\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -x + \frac{y}{2} = -2 \end{cases} \quad \text{لدينا}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -4x + 2y = -8 \end{cases} \quad \text{إذن}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases} \quad \text{أي أن}$$

$$4x - 2y = 8 \quad \text{يعني}$$

$$2x - y = 4 \quad \text{أي أن}$$

$$y = 2x - 4$$

$$S = \{(x, 2x, -4) / x \in \mathbb{R}\}$$

$$(D_1) \quad 4x - 2y = 8 \quad \text{نعتبر المستقيمين}$$

$$(D_2) \quad -x + \frac{y}{2} = -2$$

بما أن النظام (S) تقبل ما لا نهاية من الحلول فإن

المستقيمين (D₁) و (D₂) منطبقان.

$$(D_1) = (D_2) \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} 2x + 6y = 5 \\ 3x + 9y = 7 \end{cases} \quad \text{لدينا}$$

$$\begin{cases} 6x + 18y = 15 \\ 6x + 18y = 14 \end{cases} \quad \text{يعني}$$

$$15 = 14 \quad \text{وهذا غير ممكن}$$

$$S = \emptyset \quad \text{إذن}$$

$$(D_1) : 2x - 4y = 5 \quad \text{نعتبر المستقيمين}$$

$$(D_2) : 3x + 9y = 7$$

بما أن النظام ③ لا تقبل حلول فإن (D₁)

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ -2x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -x + \frac{y}{2} = -2 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} 2x + 6y = 5 \\ 3x + 9y = 7 \end{cases}$$

الجواب :

$$\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ -2x + 3y = 0 \end{cases} \quad \text{لدينا}$$

$$\begin{cases} 6x - 10y = -1 \\ -6x + 9y = 0 \end{cases} \quad \text{يعني}$$

$$6x - 10y + (-6x) + 9y = -2 \quad \text{إذن}$$

$$-y = -2 \quad \text{يعني}$$

$$y = 2 \quad \text{يعني}$$

$$\text{وبما أن } y = 2 \quad \text{فإن}$$

$$-2x + 3 \times 2 = 0$$

$$-2x = -6 \quad \text{أي}$$

$$x = 3$$

$$S = (3, 2) \quad \text{إذن}$$

$$(D_1) \quad 3x - 5y = -1 \quad \text{نعتبر المستقيمين}$$

$$(D_2) \quad -2x + 3y = 0$$

بما أن النظام ① تقبل حلا وحيدا فإن المستقيمين

(D₁) و (D₂) يتقاطعان في نقطة واحدة

$$I(3, 2)$$



لدينا

$$\begin{cases} 3|x-1| - 2y = 4 \\ |x-1| + 2y^2 = 4 \end{cases}$$

نضع

$$X = |x-1|$$

$$Y = y^2$$

إذن ② تكافئ

$$\begin{cases} 3X - 2Y = 4 \\ X + 2Y = 4 \end{cases}$$

حسب ① لدينا

$$X = 2$$

$$Y = 1$$

أي أن

$$|x-1| = 2$$

$$Y^2 = 1$$

يعني أن

$$|x-1| = 2$$

أو

$$x-1 = -2 \quad \text{أو} \quad x-1 = 2$$

أو

$$x = -1 \quad \text{أو} \quad x = 3$$

تعني أن

$$Y^2 = 1$$

أو

$$y = 1 \quad \text{أو} \quad y = -1$$

ومنه

$$S = \{(3,1); (3,-1); (-1,1); (-1,-1)\}$$

تمرين 31:

حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظام التالي

$$\textcircled{1} \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{5}{y} = 2 \\ \frac{2}{x} + \frac{7}{y} = 22 \end{cases}$$

و (D₂) متوازيان قطعاً.

$$(D_1) // (D_2)$$

تمرين 30:

1 - حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظام التالي

$$\textcircled{1} \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

2 - حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظام التالي

$$\textcircled{2} \begin{cases} 3|x-1| - 2y = 4 \\ |x-1| + 2y^2 = 4 \end{cases}$$

الجواب :

$$\textcircled{1} \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \quad 1 - \text{لدينا}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \quad \text{و}$$

إذن النظام ① تقبل حلاً وحيداً وهو :

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta}, \frac{\Delta y}{\Delta} \right)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 16 \quad \text{لدينا}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 \quad \text{و}$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{16}{8} = 2 \quad \text{إذن}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{16}{8} = 2$$

$$S = (2,2) \quad \text{ومنه}$$





$$\begin{cases} 2X - 7Y = 4 \\ -3X + 2Y = 11 \end{cases} \quad \text{إذن ② تكافئ}$$

$$\begin{cases} 6X - 21Y = 12 \\ -6X + 4Y = 22 \end{cases} \quad \text{أي أن}$$

$$-17Y = 34 \quad \text{ومنه}$$

$$Y = -2 \quad \text{ومنه}$$

$$2X - 7Y = 4 \quad \text{ولدينا}$$

$$2X - 7(-2) = 4 \quad \text{ومنه}$$

$$2X = 4 - 14$$

$$2X = -10$$

$$X = -5 \quad \text{إذن}$$

$$\begin{cases} 2x - 1 = -5 \\ y + 1 = -2 \end{cases} \quad \text{إذن} \quad \begin{cases} X = -5 \\ Y = -2 \end{cases} \quad \text{لدينا}$$

$$\begin{cases} 2x = -4 \\ Y = -3 \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$y = -3 \quad \text{و} \quad x = -2 \quad \text{أي :}$$

$$S = \{(-2, -3)\} \quad \text{ومنه}$$

تمرين 32:

حل مباني المتراجحات التالية

$$x - y - 2 \leq 0 \quad -1$$

$$2x + y + 1 > 0 \quad -2$$

$$1 - x > 0 \quad -3$$

$$-2y \geq 5 \quad -4$$

$$\begin{cases} 2(1 - 2x) - 7(y + 1) = 4 \\ 3(2x - 1) + 2(y + 1) = 11 \end{cases} \quad \text{②}$$

الجواب :

$$\text{لدينا} \quad \text{①} \quad \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{5}{y} = 2 \\ \frac{2}{x} + \frac{7}{y} = 22 \end{cases}$$

$$X = \frac{2}{x} \quad \text{و} \quad Y = \frac{1}{y} \quad \text{لنضع}$$

إذن ① تكافئ

$$\begin{cases} 3X - 5Y = 2 \\ 2X + 7Y = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6X - 10Y = 4 \\ -6X - 21Y = -66 \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

$$-31Y = -62 \quad \text{إذن}$$

$$Y = 2 \quad \text{ومنه}$$

$$3X - 5Y = 2 \quad \text{لدينا}$$

$$3X - 5 \times 2 = 2 \quad \text{أي}$$

$$3X = 12 \quad \text{يعني}$$

$$X = 4 \quad \text{ومنه}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} = 4 \\ \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \quad \text{إذن}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right) \right\} \quad \text{وبالتالي}$$

$$\begin{cases} 2(1 - 2x) - 7(y + 1) = 4 \\ 3(2x - 1) + 2(y + 1) = 11 \end{cases} \quad \text{لدينا}$$

$$X = 2x - 1 \quad Y = y + 1 \quad \text{لنضع}$$



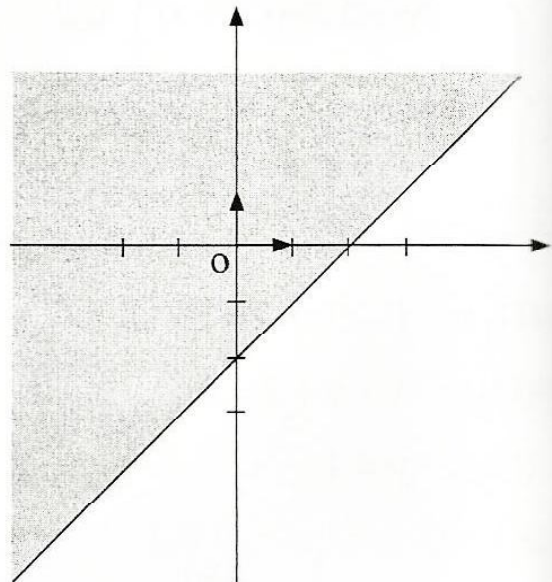


الجواب :

$$x - y - 2 \leq 0 \quad -1$$

نعتبر المستقيم (D) : $x - y - 2 = 0$

نقطتين من (D) $A(2,0)$ و $B(1,-1)$



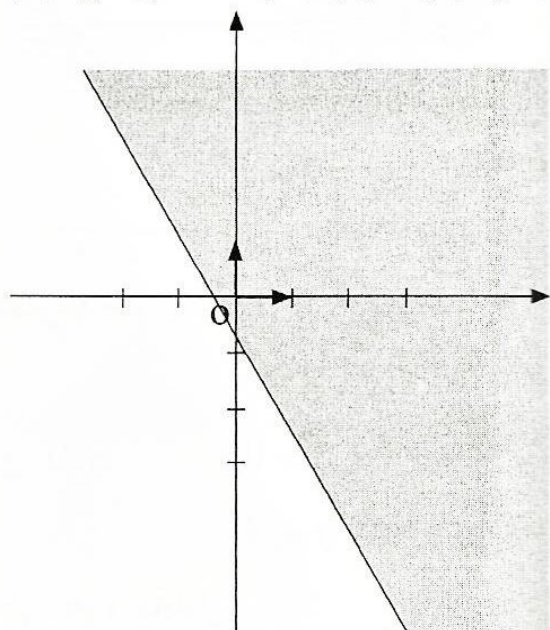
مجموعة حلول المتراجحة

هي الجزء المخدش. $x - y - 2 \leq 0$

$$2x + y + 1 = 0 \quad -2$$

نعتبر المستقيم (Δ) : $x - y - 2 = 0$

لدينا $A(0,-1)$ و $B(-1,1)$ نقطتين من (Δ)



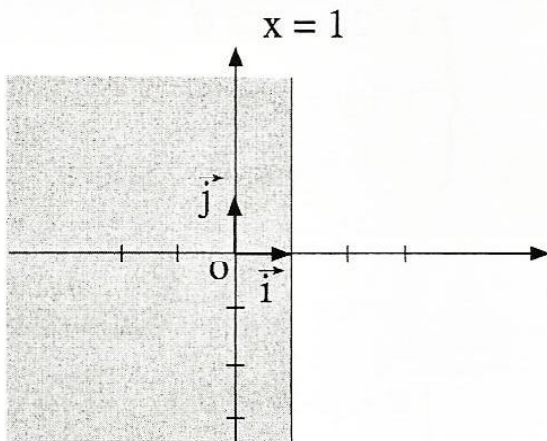
مجموعة حلول المتراجحة

هي الجزء المخدش. $2x + y + 1 > 0$

$$1 - x > 0 \quad -3 \text{ لدينا}$$

$$-x > -1 \quad \text{أي أن}$$

$$x < 1 \quad \text{إذن}$$



مجموعة حلول المتراجحة

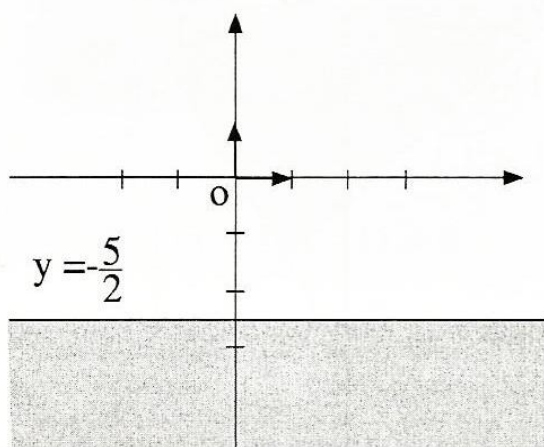
هذا الجزء المخدش. $1 - x > 0$

$$-2y \geq 5 \quad -4$$

$$2y \leq -5 \quad \text{أي أن}$$

$$y \leq -\frac{5}{2}$$

$$(\Delta) \quad y = -\frac{5}{2}$$



مجموعة حلول المتراجحة

هي الجزء المخدش. $-2y \geq 5$





تمرين 33:

حل مبيانيا النظامين التاليين

$$\begin{cases} x + y - 4 \geq 0 \\ 2x + y + 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 2 \geq 0 \\ x + y + 2 > 0 \\ y \leq 4 \end{cases}$$

الجواب :

$$\begin{cases} x + y - 4 \geq 0 \\ 2x - y + 1 \leq 0 \end{cases}$$

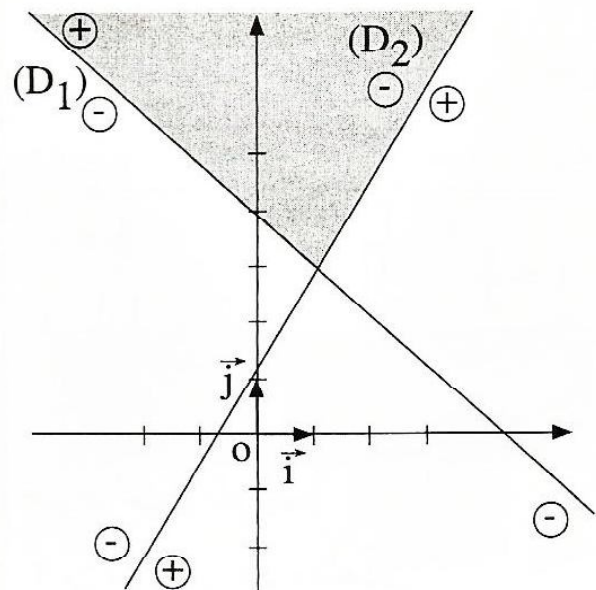
نعتبر المستقيمين

$$(D_1) : x + y - 4 = 0$$

$$(D_2) : 2x - y + 1 = 0$$

لدينا $A(2,2)$ و $B(0,4)$ نقطتين من (D_1)

لدينا $E(0,1)$ و $F(1,3)$ نقطتين من (D_2)



مجموعة حلول المتراجحة

$$\begin{cases} x + y - 4 \geq 0 \\ 2x + y + 1 \leq 0 \end{cases}$$

هي الجزء المحدث

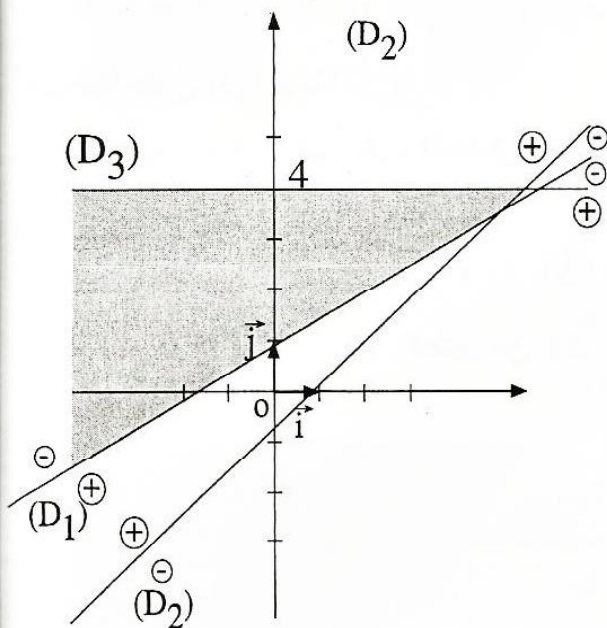
$$\begin{cases} x - 2y + 2 \geq 0 \\ x + y + 2 > 0 \\ y \leq 4 \end{cases} \quad -2 \text{ لدينا}$$

نعتبر المستقيمات

$$(D_1) : x - 2y + 2 = 0$$

$$(D_2) : x + y + 2 = 0$$

$$(D_3) : y = 4$$



مجموعة حلول النظمة

$$\begin{cases} x - 2y + 2 \geq 0 \\ x + y + 2 > 0 \\ y \leq 4 \end{cases}$$

هي الجزء المحدث





تمرين 34:

حل مبيانيا ما يلي :

$$(x + 2y - 1)(x - y) \leq 0 \quad -1$$

$$\begin{cases} (x + 2)(y - 1) \geq 0 \\ x + y - 2 < 0 \end{cases} \quad -2$$

الجواب :

$$(x + 2y - 1)(x - y) \leq 0 \quad \text{الخط}$$

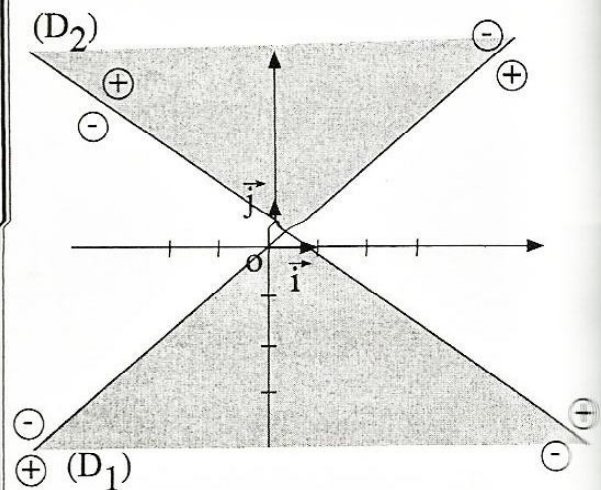
تكافئ :

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + 2y - 1 \leq 0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + 2y - 1 \geq 0 \end{cases}$$

نعتبر المستقيمين

$$(D_1) : x - y = 0$$

$$(D_2) : x + 2y - 1 = 0$$



حل المتراجحة المحدث

$$\begin{cases} (x + 2)(y - 1) \geq 0 \\ x + y - 2 < 0 \end{cases} \quad -2$$

تكافئ :

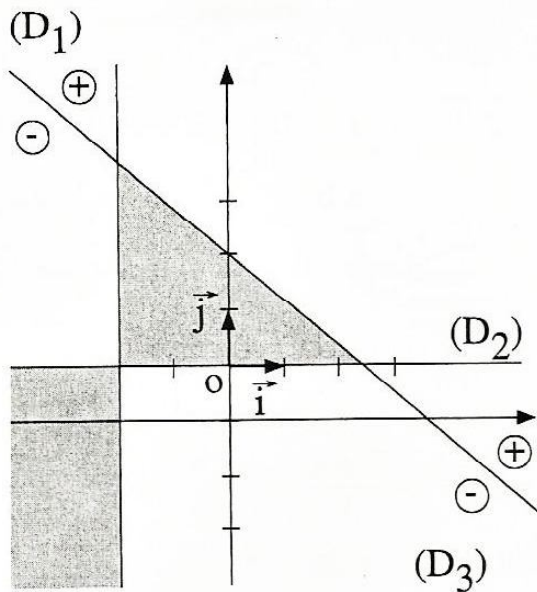
$$\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ y - 1 \geq 0 \\ x + y - 2 < 0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x + 2 \leq 0 \\ y - 1 \leq 0 \\ x + y - 2 < 0 \end{cases}$$

نعتبر المستقيمات :

$$(D_1) : x + 2 = 0$$

$$(D_2) : y - 1 = 0$$

$$(D_3) : x + y - 2 = 0$$



حلول النظمة

$$\begin{cases} (x + 2)(y - 1) \geq 0 \\ x + y - 2 < 0 \end{cases} \quad -2$$

هي الجزء المحدث