الثانوية التأهيلية: وادي الذهب الأستاذ : رشيد بلمو	درس الحدوديات	مستوى الدراسي: TCS - TCT

I. تقديم حدودية و تساوي حدوديتين:

1) تقديم حدودية :أمثلة و تعاريف: مثال 1:

التعبير $P(x)=\frac{1}{2}x^3-\sqrt{2}x^2+x-\frac{1}{3}$ يسمى حدودية و $\frac{1}{2}x^3$ يسمى حد الحدودية من الدرجة3. و $-\sqrt{2}x^2$ يسمى حد الحدودية من الدرجة2.

x يسمى حد الحدودية من الدرجة 1. $-\frac{1}{3}$ يسمى حد الحدودية من الدرجة 0 و يسمى كذلك الحد الثابت.

الحد الأكبر درجة هو $\frac{1}{2}x^3$, العدد 3 يسمى درجة الحدودية. و نكتب $d^0P=3$

مثال 2: كل حدودية من الدرجة الأولى تسمى حدانية و تكتب على شكل: $ax+b$ حيث $a\in\mathbb{R}^*$.

مثال 3: التعبير $x^2+2\sqrt{x}+5$ ليس بحدودية لأنها تحتوي على $\sqrt{x}$.

مثال 4: الحدودية: $P(x)=3x^4+x^3-7x+\sqrt{3}$ درجتها4.

3 هو معامل الحد من الدرجة 4 . 1 هو معامل الحد من الدرجة 3 , 0 هو معامل الحد من الدرجة 2.

-7 هو معامل الحد من الدرجة 1 , $\sqrt{3}$ هو معامل الحد من الدرجة 0.

نرمز عادة لحدودية بأحد الرموز: $P(x)$ أو $Q(x)$ أو $R(x)$ أو $S(x)$ ....

نعتبر الحدودية: $P(x)=4x^2-x^3+x^4+3+x$.

يمكن كتابة الحدودية $P(x)$:

- إما على شكل: $P(x)=x^4-x^3+4x^2+x+3$ و نقول إننا رتبنا $P(x)$ تبعا للقوى التزايدية.
- إما على شكل: $P(x)=3+x+4x^2-x^3+x^4$ و نقول أننا رتبنا $P(x)$ تبعا للقوى التناقصية.

**** تمرين تطبيقي : (01 - س)**

2) تعريف: الحدودية المنعدمة هي الحدودية التي جميع معاملاتها تساوي صفرا. أي $P(x)=0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ملحوظة: الحدودية المنعدمة ليست لها درجة.

3) تساوي حدوديتين:

خاصية: تكون حدوديتان متساويتين اذا و فقط اذا كانت لهما نفس الدرجة و كانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.

مثال: نعتبر الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ بحيث: $P(x)=(a-1)x^3+2ax^2+5x+6$ و $Q(x)=x^3+4x^2+(3+a)x^2+3a$

حيث a عدد حقيقي يخالف 1. لنحدد قيمة العدد الحقيقي a بحيث تكون $P(x)$ و $Q(x)$ متساويتين.

**** تمرين تطبيقي : تساوي حدوديتين (05 - س)**

II. جمع و ضرب حدوديتين:

مثال1: أحسب مجموع الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ حيث: $P(x)=x^2+x+1$ و $Q(x)=x^3-x^2+2$. ثم قارن :

$d^0(P+Q)......d^0P+d^0Q$

خاصية 1: مجموع حدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ هو حدودية نرمز لها بالرمز $P(x)+Q(x)$.

خاصية 2: لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتين غير منعدمتين. لدينا: $d^0(P+Q)\le d^0P+d^0Q$ في حالة $P(x)+Q(x)$ حدودية غير منعدمة.

مثال2: أحسب جذاء الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ حيث: $P(x)=x^2+x+1$ و $Q(x)=x^3-x^2+2$. ثم قارن :

$d^0(P\times Q)......d^0P+d^0Q$

خاصية 3: جذاء حدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ هو حدودية نرمز لها بالرمز $P(x)\times Q(x)$.

خاصية 4: لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتين غير منعدمتين. لدينا: $d^0(P(x)\times Q(x))=d^0P(x)+d^0Q(x)$

**** تمرين تطبيقي : (08 - س)**

III. القسمة الاقليدية لحدودية على $x-\alpha$:

1) خاصية و تعريف: لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n\in\mathbb{N}^*$, و α عددا حقيقيا.
توجد حدودية $Q(x)$, درجتها $n-1$ بحيث: $P(x)=(x-\alpha)Q(x)+P(\alpha)$
الحدودية $Q(x)$ تسمى خارج القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x-\alpha$.
العدد الحقيقي $P(\alpha)$ يسمى باقي القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x-\alpha$.

مثال: لدينا $x^2-3=(x-2)(x+2)+1$ نقول في هذه الحالة, ان $x-2$ هو خارج القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)=x^2-3$ على $x+2$ و 1 هو باقي القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x+2$.

2) جذر حدودية:

تعريف: لتكن $P(x)$ حدودية و α عددا حقيقيا.
نقول أن α جذر للحدودية $P(x)$ إذا كان: $P(\alpha)=0$. α يسمى أيضا صفرا للحدودية $P(x)$.

أمثلة: 3- جذر للحدودية: $P(x)=x^2+2x-3$ لأن $P(-3)=0$ و 1 جذر للحدودية $P(x)$ لأن $P(1)=0$.
2 ليس جذرا للحدودية $P(x)$ لأن $P(2)=5$.

**** تمرين تطبيقي : (09 - س)**

3) قابلية القسمة على $x-\alpha$:

تعريف: لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n\geq 1$ و α عدد حقيقيا.
$P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$ إذا وجدت حدودية $Q(x)$ درجتها $n-1$ بحيث: $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$

خاصية: لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n\geq 1$ و α عددا حقيقيا.
$P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$ إذا و فقط إذا كان α جذرا للحدودية $P(x)$.

برهان:

**** تمرين تطبيقي : (10 - س)**

**** تمرين تطبيقي : (11 - س)**

مراحل انجاز القسمة الاقليدية:

1. نضع مكان النقطة الحد الناسب بحيث اذا ضربناه في x نجد: x^3 هذا الحد هو x^2 (لأن $x^3=x\cdot x^2$)
2. نقوم بضرب x^2 في $x+3$, فنحصل على x^3+3x^2 ثم نضع مقابل x^3+3x^2 أي $-x^3+-3x^2$ تحت $P(x)$.
3. نقوم بعملية الجمع بين $P(x)$ و $-x^3+-3x^2$ نحصل على $2x^2-4x+3$.
4. نعيد نفس المراحل المتبعة في 1 و 2 و 3 مع $2x^2-4x+3$ و $x+3$. و نتوقف عن المراحل 1 و 2و 3 عندما يكون الباقي عددا حقيقيا معلوما (ثابت).

نعيد نفس الطريقة المتبعة في السؤال 1, لكن في السؤال الثاني نلاحظ أن $P(x)$ لا يحتوي على حد من الدرجة الثانية لذا وجب تعويضه ب $0\cdot x^2$ لكي تتم العمليات عند وضع القسمة بشكل سليم و تجنب الأخطاء.