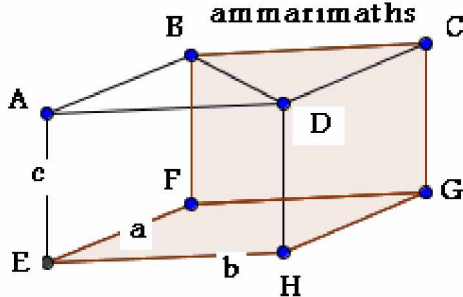


الحدوديات

I. الحد وديات أو الدوال الحدودية:

(1) أمثلة وتعاريف:



نعتبر متوازي المستطيلات قائم كما في الشكل حيث أبعاده هي $l(x)$ و $L(x)$ و $h(x)$.
ليكن x عدد حقيقي نعتبر أن الأبعاد $l(x)$ و $L(x)$ و $h(x)$ تتغير تبعاً لتغير العدد x بحيث:

$$h(x) = 2x - 3 ; L(x) = 3x + 2 ; l(x) = x - 1$$

(a) نلاحظ أن الأعداد $h(x)$; $L(x)$; $l(x)$ هي دوال

على شكل $f(x) = ax + b$ نقول أن f حدودية من الدرجة الأولى.

ونذكر أن تمثيلها المبياني يكون على شكل مستقيم حيث b هو الأرتوب عند الأصل و a هو المعامل الموجه.

(b) لتكن $S(x)$ هي مساحة قاعدة متوازي المستطيلات القائم و $V(x)$ هو حجمه ، لدينا إذن :

$$V(x) = S(x) = l(x) \times L(x) ; S(x) = l(x) \times L(x)$$

$$\begin{cases} S(x) = (x - 1) \times (3x + 2) = 3x^2 - x - 2 \\ V(x) = (3x^2 - x - 2) \times (2x - 3) = 6x^3 - 11x^2 - x + 6 \end{cases}$$

وهكذا نجد بعد إجراء الحساب أن:

نلاحظ أن الأعداد $S(x)$ هي دالة على شكل $f(x) = ax^2 + bx + c$ مع $a \neq 0$ ، نقول أن f حدودية من الدرجة الثانية.

ونلاحظ أن الأعداد $V(x)$ هي دالة على شكل $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ مع $a \neq 0$ ، نقول أن f حدودية من الدرجة الثالثة.

(c) أتمم الجدول التالي:

Valeurs de x	2	3	...	...
$l(x)$	$l(2) = 1$	$l(3) = \dots$	$l(\dots) = 3$	$l(\dots) = \dots$
$L(x)$	$L(2) = 8$	$L(3) = \dots$	$L(\dots) = \dots$	$L(\dots) = \dots$
$h(x)$	$h(2) = 1$	$h(3) = \dots$	$h(\dots) = \dots$	$h(\dots) = 4$
$S(x)$	$S(2) = 8$	$S(3) = \dots$	$S(\dots) = \dots$	$S(\dots) = \dots$
$V(x)$	$V(2) = 8$	$V(3) = \dots$	$V(\dots) = \dots$	$V(\dots) = \dots$

(d) تعريف عام:

الحدودية (أو الدالة الحدودية) هي كل صيغة جبرية على شكل :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + a_{n-2} X^{n-2} + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$$

الأعداد : $a_0 ; a_1 ; a_2 ; \dots ; a_{n-1} ; a_n$ تسمى معاملات الحدودية.

تكون الحدودية منعدمة إذا كانت جميع معاملاتها منعدمة وبالتالي فإن $P(X) = 0$ مهما تكن قيمة المتغير X .

(e) درجة حدودية غير منعدمة:

الحدودية (أو الدالة الحدودية) هي كل صيغة جبرية على شكل :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + a_{n-2} X^{n-2} + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \text{ مع } a_n \neq 0$$

العدد : a_n يسمى آخر معامل غير منعدم. في هذه الحالة نقول أن درجة الحدودية هي n ونكتب : $d^0 P = n$

ملاحظة: الحدودية المنعدمة ليست لها درجة لأنها لا تتوفر على آخر معامل غير منعدم.

الحد وديات الثابتة و غير المنعدمة درجتها 0 .

الحدوديات

(2) تساوي حدوديتين :

تكون الحدوديتان غير المنعومتان $P(X)$ و $Q(X)$ متساويتان إذا كانت لهما نفس الدرجة وكانت معاملاتهما متساوية على التوالي ، أي أن:

$$P(X) = Q(X)$$

يعني أن

$$a_n = b_n \text{ et } a_{n-1} = b_{n-1} \text{ et } \dots \text{ et } a_2 = b_2 \text{ et } a_1 = b_1 \text{ et } a_0 = b_0 \text{ و } d^0 P = d^0 Q = n$$

(3) عمليات حول الحدوديات :

نعتبر الحد وديات التالية بحيث:

$$Q(x) = 3x^2 + 2x - 3 ; P(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3x + 2$$

(a) حدد درجة كل حدودية من الحدوديتين $P(x)$; $Q(x)$.

$$d^0 Q = \dots ; d^0 P = \dots$$

(b) أحسب $s(x) = Q(x) + P(x)$ و حدد درجة الحدودية $s(x)$. ماذا تلاحظ ؟

نلاحظ

لدينا

$$s(x) = Q(x) + P(x) = \dots$$

$$s(x) = \dots$$

$$d^0 (P + Q) \leq \sup(d^0 P, d^0 Q)$$

نلاحظ أن :

(c) أحسب $p(x) = Q(x) \times P(x)$ و حدد درجة الحدودية $p(x)$. ماذا تلاحظ ؟

نلاحظ

لدينا

$$p(x) = Q(x) \times P(x) = \dots$$

$$p(x) = \dots$$

$$p(x) = \dots$$

$$d^0 (P \times Q) = d^0 P \times d^0 Q$$

نلاحظ أن :

بصفة عامة: $P(X)$ و $Q(X)$ حدوديتان غير منعومتان ، لدينا:

$$d^0 (P \times Q) = d^0 P \times d^0 Q$$

$$d^0 (P + Q) \leq \sup(d^0 P, d^0 Q)$$

(d) القسمة الأقليدية :

نعتبر الحد وديات التالية بحيث:

$$B(x) = x^2 + 2x - 3 ; A(x) = 7x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x + 2$$

$$P(x) = 7x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x + 2$$

$$B(x) = x^2 + 2x - 3$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$R(x) = \dots$$

$$Q(x) = \dots$$

الحدوديات

$$0 \leq d^0(R) \leq d^0Q \quad \text{مع} \quad A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x) \quad \text{لدينا}$$

بصفة عامة: مهما تكن الحدوديتان $A(x)$ و $B(x)$ مع $B(x) \neq 0$ توجد حدوديتان $R(x)$ et $Q(x)$ بحيث:

$$0 \leq d^0(R) \leq d^0B \quad \text{مع} \quad A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$$

(4) جذر حدودية :

لتكن $P(x)$ حدودية بحيث $d^0P \geq 1$ ، العدد a هو جذر للحدودية يعني أن $P(a) = 0$ أي أن a هو حل للمعادلة $P(x) = 0$.

(a) تمرين تطبيقي: (انظر التصحيح في دفتر التماوين)

On considère les expressions algébriques suivantes: **نعتبر الحدوديتان:**

$$g(x) = f(x) + (x^2 - 1) - 3(x - 1) \quad ; \quad f(x) = (x - \frac{1}{3})^2 - \frac{4}{9}$$

(1) أحسب $f(\frac{1}{3})$ و $f(1)$ ، ثم استنتج $g(\frac{1}{3})$ و $g(1)$

(2) أنشر $f(x)$ و $g(x)$ حدد درجة كل من الحدوديتن f و g .

(3) عمل الحدودية $f(x)$ واستنتج تعميلا للحدودية $g(x)$

(4) حل المعادلة $f(x) = 0$ واستنتج جذور الحدودية $f(x)$

(5) حدد جذور الحدودية $g(x)$

(6) لاحظ بشير "ضيفنا الكريم" أن هناك علاقة تجسد الكلام التالي :

a عدد حقيقي و h دالة حدودية : " $h(a) = 0$ يعني أن الحدودية $h(x)$ تقبل القسمة على $x - a$ "
وضح صحة هذا الكلام بثلاثة أمثلة من التمرين.

(5) خاصية استكشافية :

لتكن $P(x)$ دالة حدودية و a عدد حقيقي :

الحدودية $P(x)$ تقبل القسمة على $x - a$ يعني أن $P(a) = 0$

ما تحدث به بشير كان صحيحا سنحاول أن نبرهن على ذلك: حسب مبرهنة القسمة الأقليدية توجد حدوديتان $R(x)$ et $Q(x)$

بحيث: $P(x) = (x - a) \times Q(x) + R(x)$ مع $0 \leq d^0(R) < d^0(x - a) = 1$ ، نستنتج أن $d^0(R) = 0$

وبالتالي فإن الحدودية $R(x)$ ثابتة نعوض x بالعدد a في العلاقة $P(x) = (x - a) \times Q(x) + R(x)$ نجد:

$$R(x) = P(a) \quad \text{وبما أن الحدودية } R(x) \text{ ثابتة فإن } R(x) = P(a)$$

نستنتج أن: $P(x) = (x - a) \times Q(x) + P(a)$. نحن جاهزون لإتمام البرهنة

نفترض أن الحدودية $P(x)$ تقبل القسمة على $x - a$ ، إذن $P(x) = (x - a) \times Q(x)$ وهذا يعني أن : $P(a) = 0$

نفترض أن $P(a) = 0$ ، إذن $P(x) = (x - a) \times Q(x)$ وهذا يعني أن : $P(a) = 0$ نعوض في العلاقة

$P(x) = (x - a) \times Q(x) + P(a)$ نجد: $P(x) = (x - a) \times Q(x)$ نستنتج أن: الحدودية $P(x)$ تقبل القسمة على $x - a$.