

الأستاذ:
نجيب
عثماني

تمارين محلولة: الترتيب في مجموعة الأعداد
الحقيقية
المستوى : الجذع مشترك علمي و الجذع مشترك تكنولوجيا

أكاديمية
الجهة
الشرقية

$$a^2 = (10\sqrt{51})^2 = 5100$$

$$b^2 = (70 + \sqrt{2})^2 = 4900 + 140\sqrt{2} + 2 = 4902 + 140\sqrt{2}$$

$$a^2 - b^2 = 198 - 140\sqrt{2} = 2(99 - 70\sqrt{2})$$

لدينا : $99 - 70\sqrt{2} > 0$ لأن : $(99)^2 = 9801$ و $(70\sqrt{2})^2 = 9800$ ومنه

$$2(99 - 70\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^{+*} \text{ أي } 99 - 70\sqrt{2} \in \mathbb{R}^{+*}$$

ومنه : $a^2 - b^2 > 0$ ووبما أن العددين : a و b موجبين
فان : $a > b$

$$\text{تمرين 7: نضع } a = \frac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \text{ و } b = \frac{4 + \sqrt{2}}{7}$$

$$(1) \text{ بين أن : } b - a = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{14}$$

(2) قارن العددين : a و b
(الجواب: 1)

$$b - a = \frac{4 + \sqrt{2}}{7} - \frac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{4 + \sqrt{2}}{7} - \frac{(1 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}$$

$$b - a = \frac{4 + \sqrt{2}}{7} - \frac{2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 2}{4 - 2} = \frac{4 + \sqrt{2}}{7} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8 + 2\sqrt{2} - 7\sqrt{2}}{14}$$

$$b - a = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{14}$$

(2) مقارنة العددين : a و b

$$\text{وجدنا : } b - a = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{14}$$

لدينا : $8 > 5\sqrt{2}$ لأن : $(8)^2 = 64$ و $(5\sqrt{2})^2 = 50$ ومنه

$$b > a : \text{ وبالتالي } \frac{8 - 5\sqrt{2}}{14} \in \mathbb{R}^{+*} \text{ ومنه : } 8 - 5\sqrt{2} \in \mathbb{R}^{+*}$$

$$\text{تمرين 8: نضع } a = 3\sqrt{18} - \sqrt{72} + 2\sqrt{\frac{9}{2}}$$

$$\text{و } b = \sqrt{28} + \sqrt{32} - 2\sqrt{2}$$

$$(1) \text{ بين أن : } a - b = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{7}$$

(2) قارن العددين : a و b
(الجواب: 1)

$$a - b = \left(3\sqrt{18} - \sqrt{72} + 2\sqrt{\frac{9}{2}} \right) - (\sqrt{28} + \sqrt{32} - 2\sqrt{2})$$

$$a - b = (9\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) - (2\sqrt{7} + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2})$$

$$a - b = 9\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{7} - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$

$$a - b = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{7}$$

$$\text{تمرين 1: قارن بين } \frac{100}{101} \text{ و } \frac{101}{102}$$

(الجواب:

$$\text{نحسب الفرق : } \frac{101}{102} - \frac{100}{101} = \frac{101 \times 101 - 100 \times 102}{101 \times 102} = \frac{10201 - 10200}{101 \times 102}$$

$$\text{اذن : } \frac{101}{102} \geq \frac{100}{101} \text{ ومنه } \frac{101}{102} - \frac{100}{101} = \frac{1}{101 \times 102} \in \mathbb{R}^{+}$$

$$\text{تمرين 2: قارن : } a \text{ و } b \text{ ونضع } a = 2 + \sqrt{3} \text{ و } b = 2\sqrt{3}$$

(الجواب:

لدينا $a - b = 2 - \sqrt{3}$, و بما أن $2 - \sqrt{3}$ عدد حقيقي موجب قطعاً

أي: $(a - b) \in \mathbb{R}^{+*}$ فان: $a > b$

$$\text{تمرين 3: } a \in \mathbb{R} \text{ قارن : } 2a \text{ و } a^2 + 1$$

$$\text{(الجواب : } (a^2 + 1) - 2a = a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 \geq 0$$

ومنه $a^2 + 1 \geq 2a$ مهما يكن : $a \in \mathbb{R}$

$$\text{تمرين 4: قارن العددين : } a = \sqrt{6} \text{ و } b = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$$

(الجواب: نحسب الفرق :

$$a - b = \sqrt{6} - (\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1) = \sqrt{3} \times 2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)$$

$$\sqrt{3} \text{ } a - b = \sqrt{3} \times \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1 = \sqrt{3} \times (\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{2} - 1)$$

$$a - b = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - 1) \text{ } a - b = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - 1)$$

لدينا : $\sqrt{2} > 1$ لأن : $(\sqrt{2})^2 = 2$ و $(1)^2 = 1$ ومنه $(\sqrt{2} - 1) \in \mathbb{R}^{+*}$

ولدينا : $\sqrt{3} > 1$ لأن : $(\sqrt{3})^2 = 3$ و $(1)^2 = 1$ ومنه $(\sqrt{3} - 1) \in \mathbb{R}^{+*}$

ومنه : $a - b = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - 1) \in \mathbb{R}^{+*}$ وبالتالي : $a > b$

$$\text{تمرين 5: قارن العددين : } a = \sqrt{10} \text{ و } b = \sqrt{5} + \sqrt{2} - 1$$

(الجواب: نحسب الفرق :

$$a - b = \sqrt{10} - (\sqrt{5} + \sqrt{2} - 1) = \sqrt{5} \times 2 - (\sqrt{5} + \sqrt{2} - 1)$$

$$\sqrt{5} \text{ } a - b = \sqrt{5} \times \sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{2} + 1 = \sqrt{5} \times (\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{2} - 1)$$

$$a - b = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{5} - 1) \text{ } a - b = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{5} - 1)$$

لدينا : $\sqrt{2} > 1$ لأن : $(\sqrt{2})^2 = 2$ و $(1)^2 = 1$ ومنه $(\sqrt{2} - 1) \in \mathbb{R}^{+*}$

ولدينا : $\sqrt{5} > 1$ لأن : $(\sqrt{5})^2 = 5$ و $(1)^2 = 1$ ومنه $(\sqrt{5} - 1) \in \mathbb{R}^{+*}$

ومنه : $a - b = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{5} - 1) \in \mathbb{R}^{+*}$ وبالتالي : $a > b$

$$\text{تمرين 6: قارن العددين : } a = 10\sqrt{51} \text{ و } b = 70 + \sqrt{2}$$

(الجواب: لنقارن : a^2 و b^2

(2) استنتج أنه إذا كان: a و b موجبين فإن: $a+b > \sqrt{2}$
الجواب: $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$ و $a^2 + b^2 = 2$
 (1) لدينا $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = 2 + 2ab$
 ومنه: $(a+b)^2 = 2(1+ab)$
 (2) الاستنتاج: $a \in \mathbb{R}^+$ و $b \in \mathbb{R}^+$
 إذن: $a \geq 0$ و $b \geq 0$ ومنه $a+b \geq 0$ و $ab \geq 0$
 علما أن: $(a+b)^2 = 2(1+ab)$ و $1+ab \geq 1$
 فإن: $(a+b)^2 > 2$ ومنه: $a+b > \sqrt{2}$ لأن: $a+b \geq 0$
تمرين 13: ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^+$
 1. قارن العددين: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ و $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$
 2. استنتج مقارنة العددين: $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ و $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$
الجواب (1): x عنصرا من $\mathbb{R}^+$ يعني $x \geq 0$
 لدينا $x+2 \geq x$ لأن: $(x+2) - x \geq 0$
 إذن: $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x}$ وإضافة $\sqrt{x+1}$ نجد النتيجة المطلوبة:
 أي أن: $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} \geq \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$
 (2) الاستنتاج:
 بضرنا في المرافق نجد المتساوية التالية:

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} = \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}$$
 أي أن:

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} = \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x+1})^2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = \frac{x+2 - x-1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}$$
 ولدينا أيضا:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1 - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$
 أي أن:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1 - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$
 وبما أن: $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} \geq \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ فإن:

$$\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$$
 إذن نستنتج أن: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} \leq \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$
تمرين 14: ليكن x عددا حقيقيا موجبا.
 قارن العددين: x و $2\sqrt{x} - 1$
الجواب: $x - (2\sqrt{x} - 1) = x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} \times 1 + 1^2 = (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$
 ومنه $x \geq (2\sqrt{x} - 1)$ مهما يكن: $x \in \mathbb{R}^+$
تمرين 15: ليكن n عددا صحيحا طبيعيا.
 نضع: $a = \sqrt{4n^2 + 1}$ و $b = 2n + 1$ قارن العددين a و b .
الجواب: لمقارنة عددين موجبين نقارن مربعيهما

$$a^2 = (\sqrt{4n^2 + 1})^2 = 4n^2 + 1$$

$$b^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$$

$$b^2 - a^2 = 4n^2 + 4n + 1 - (4n^2 + 1) = 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 1 = 4n$$

$$b^2 - a^2 = 4n \geq 0$$
 ومنه $b^2 \geq a^2$ إذن نستنتج أن $b \geq a$ مهما يكن: $x \in \mathbb{N}$

(2) مقارنة العددين: a و b
 وجدنا: $a - b = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{7}$
 لدينا: $4\sqrt{2} > 2\sqrt{7}$ لأن: $(4\sqrt{2})^2 = 32$ و $(2\sqrt{7})^2 = 28$
 ومنه $a > b$ وبالتالي $4\sqrt{2} - 2\sqrt{7} \in \mathbb{R}^{++}$
تمرين 9: قارن العددين: $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ و $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$
الجواب: نحسب الفرق:

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(2-\sqrt{3}) - (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)} = \frac{2-\sqrt{3}-\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}+1)} = \frac{3-2\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(2-\sqrt{3}) - (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)} = \frac{2-\sqrt{3}-\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}+1)} = \frac{3-2\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2-\sqrt{3}-\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}+1)} = \frac{3-2\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2-\sqrt{3}-\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}+1)} = \frac{3-2\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)}$$
 لدينا: $3\sqrt{3} > 5$ لأن: $(3\sqrt{3})^2 = 27$ و $(5)^2 = 25$ ومنه
 $3\sqrt{3} - 5 \in \mathbb{R}^{++}$
 ومنه: $\frac{3\sqrt{3}-5}{2} \in \mathbb{R}^{++}$ وبالتالي: $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} > \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$
تمرين 10: ليكن a و b عنصريين من $\mathbb{R}^*$.
 نضع: $x = \frac{7a+2b}{7a}$ و $y = \frac{8b}{7a+2b}$ قارن العددين x و y .
الجواب: نحسب الفرق:

$$x - y = \frac{7a+2b}{7a} - \frac{8b}{7a+2b} = \frac{(7a+2b)^2 - 7a \times 8b}{7a(7a+2b)} = \frac{49a^2 + 14ab + 4b^2 - 56ab}{7a(7a+2b)} = \frac{49a^2 - 42ab + 4b^2}{7a(7a+2b)}$$

$$x - y = \frac{49a^2 - 42ab + 4b^2}{7a(7a+2b)} = \frac{(7a-2b)^2}{7a(7a+2b)}$$

$$x - y = \frac{(7a-2b)^2}{7a(7a+2b)} \in \mathbb{R}^+$$
 لأن: $(7a-2b)^2 \in \mathbb{R}^+$ و $7a(7a+2b) \in \mathbb{R}^+$ وبالتالي: $x \geq y$
تمرين 11: ليكن x و y عددين حقيقيين موجبين قطعا ومختلفين
 اعط إشارة الخارج: $Z = \frac{x^2 - y^2}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}$
الجواب: $x > 0$ و $y > 0$ و $x \neq y$ لنحدد إشارة الخارج: Z

$$Z = \frac{x^2 - y^2}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} = \frac{x^2 - y^2}{\frac{y - x}{xy}} = (x - y)(x + y) \times \frac{xy}{y - x}$$

$$Z = (x - y)(x + y) \times \frac{xy}{-(x - y)} = -xy(x + y)$$
 لدينا $x > 0$ و $y > 0$ إذن $xy > 0$ و $x + y > 0$ ومنه $-xy < 0$
 وبالتالي: $Z < 0$
تمرين 12: ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث: $a^2 + b^2 = 2$
 (1) بين أن: $(a+b)^2 = 2(1+ab)$

تمرين 16: ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث: $x < y < 3$

1. بين أن: $x + y - 6 < 0$

2. قارن العددين $a = x^2 - 6x + 1$ و $b = y^2 - 6y + 1$

الجواب:

(1) لدينا $x < y < 3$ إذن $x < 3$ و $y < 3$ ومنه $x + y < 6$

وبالتالي: $x + y - 6 < 0$

(2) نحسب الفرق: $a - b = (x^2 - 6x + 1) - (y^2 - 6y + 1)$

$a - b = x^2 - 6x + 1 - y^2 + 6y - 1 = x^2 - y^2 - 6x + 6y$

$a - b = (x - y)(x + y) - 6(x - y) = (x - y)(x + y - 6)$

لدينا $x < y$ إذن $x - y \in \mathbb{R}^-$ وسبق أن وجدنا أن $x + y - 6 \in \mathbb{R}^-$

ومنه $a - b \in \mathbb{R}^+$ أي: $a \geq b$ وبالتالي

تمرين 17: بعد التمثيل على مستقيم للمجالين I و J

حدد اتحاد وتقاطع المجالين I و J في الحالات الآتية

(1) $I =]-3, 7]$ و $J = [-1, +\infty[$

(2) $I =]-\infty, 5[$ و $J = [4, 10]$

(3) $I = [0, 10[$ و $J = [-5, -1]$

(4) $I = \left[-\frac{2}{3}, 2\right]$ و $J = \left]-1, \frac{3}{2}\right]$

الجواب:

(1) $I \cup J =]-3; +\infty[$ و $I \cap J =]-1, 7]$

(2) $I \cup J =]-\infty; 10]$ و $I \cap J = [4, 5[$

(3) $I \cup J = [-5; 10]$ و $I \cap J = \emptyset$

(4) $I \cup J =]-1, 2]$ و $I \cap J = \left[-\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right]$

تمرين 18: حل في $\mathbb{R}$ النظم الآتية

(1) $\begin{cases} x > 5 \\ x \leq 4 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x \geq -3 \\ x > 2 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x > 7 \\ x \geq 0 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ -7 < x < 10 \end{cases}$

الجواب: الرمز يعني التقاطع

(1) $x \in]5, +\infty[$ يعني $x > 5$

$x \in]-\infty, 4]$ يعني $x \leq 4$

$S =]5, +\infty[\cap]-\infty, 4] = \emptyset$

(2) $x \in [-3, +\infty[$ يعني $x \geq -3$

$x \in]2, +\infty[$ يعني $x > 2$

$S =]2, +\infty[\cap [-3, +\infty[=]2, +\infty[$

(3) $x \in]7, +\infty[$ يعني $x > 7$

$x \in [0, +\infty[$ يعني $x \geq 0$

$S =]7, +\infty[\cap [0, +\infty[=]7, +\infty[$

(4) $x \in [-7, 10[$ يعني $-7 < x < 10$

$x \in [-3, 0]$ يعني $-3 \leq x \leq 0$

$S = [-7, 10[\cap [-3, 0] = [-3, 0]$

تمرين 19: نضع $x \in [1; 3]$ و $y \in [2; 4]$

(1) اعط تأطيرا للأعداد التالية: x^2 و y^2 و $2x$ و $3y$ و $-x$ و $-y$

و $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{y}$ و $\frac{x}{y}$

(2) حدد سعة التأطير لكل من A و B و $A = x^2 + y^2 + 2x - 3y$ و $B = \frac{2x-1}{x+1}$

الجواب: (1) $x \in [1; 3]$ يعني $1 \leq x \leq 3$

$y \in [2; 4]$ يعني $2 \leq y \leq 4$

$1 \leq x \leq 3$ يعني $1^2 \leq x^2 \leq 3^2$

$2 \leq y \leq 4$ يعني $2^2 \leq y^2 \leq 4^2$

$1 \leq x \leq 3$ يعني $2 \times 1 \leq 2x \leq 2 \times 3$

$2 \leq y \leq 4$ يعني $3 \times 2 \leq 3y \leq 3 \times 4$

$1 \leq x \leq 3$ يعني $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{1}$

$2 \leq y \leq 4$ يعني $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$

لدينا $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$ إذن: $1 \times \frac{1}{4} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 3 \times \frac{1}{2}$

أي: $\frac{1}{4} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{3}{2}$

(2) تأطير A: $-12 \leq -3y \leq -6$ يعني $6 \leq 3y \leq 12$

وحسب النتائج السابقة وجمع المتفاوتات طرف لطرف نجد:

$1 + 4 + 2 - 12 \leq x^2 + y^2 + 2x - 3y \leq 9 + 16 + 6 - 6$

وبالتالي: $-5 \leq A \leq 25$

وسعة التأطير هي: $r = 25 - (-5) = 30$

تأطير B: $B = \frac{2x-1}{x+1} = (2x-1) \times \frac{1}{x+1}$

لدينا $1 \leq x \leq 3$ يعني $2 \leq 2x \leq 6$

يعني $1 \leq 2x - 1 \leq 5$

لدينا $1 \leq x \leq 3$ يعني $2 \leq x + 1 \leq 4$

وبضرب المتفاوتتين التاليتين $1 \leq 2x - 1 \leq 5$ و $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$ طرف

لطرف نجد

$\frac{1}{4} \leq B \leq \frac{5}{2}$ يعني $1 \times \frac{1}{4} \leq (2x-1) \times \frac{1}{x+1} \leq 5 \times \frac{1}{2}$

وسعة التأطير هي: $r = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

تمرين 20: نضع $x \in [-3; 2]$ و $y \in [-7; 1]$

(1) اعط تأطيرا للأعداد التالية: $x + 2y$ و $2x - y$

$-5x + 3y - 8$

(2) اعط تأطيرا للعدد: xy

الجواب: (1) $x \in [-3; 2]$ يعني $-3 \leq x \leq 2$

• $y \in [-7; 1]$ يعني $-7 \leq y \leq 1$

ومنه: $-7 \times 2 \leq 2y \leq 1 \times 2$

إذن: $-7 \times 2 + (-3) \leq 2y + x \leq 1 \times 2 + 2$

إذن: $-17 \leq 2y + x \leq 4$

• لدينا $-6 \leq 2x \leq 4$ و $-1 \leq -y \leq 7$

إذن: $-6 - 1 \leq 2x - y \leq 4 + 7$

إذن: $-7 \leq 2x - y \leq 11$

• لدينا $-3 \leq x \leq 2$ إذن: $-10 \leq -5x \leq 15$

لدينا $-7 \leq y \leq 1$ اذن : $-21 \leq 3y \leq 3$

اذن : $-31 \leq -5x + 3y \leq 18$

اذن : $-23 \leq -5x + 3y + 8 \leq 26$

(2) تأطير : xy

لدينا $-3 \leq x \leq 2$ و $-7 \leq y \leq 1$

الحالة 1:

$-3 \leq x \leq 0$ و $-7 \leq y \leq 0$

يعني $0 \leq -x \leq 3$ و $0 \leq -y \leq 7$

و منه : $0 \leq (-x) \times (-y) \leq 21$ أي $0 \leq xy \leq 21$ (1)

الحالة 2:

$-3 \leq x \leq 0$ و $0 \leq y \leq 1$

يعني $0 \leq -x \leq 3$ و $0 \leq y \leq 1$

و منه : $0 \leq (-x) \times y \leq 3$ أي $-3 \leq xy \leq 0$ (2)

الحالة 3:

$0 \leq x \leq 2$ و $-7 \leq y \leq 0$

يعني $0 \leq x \leq 2$ و $0 \leq -y \leq 7$

و منه : $0 \leq (-y) \times x \leq 14$ أي $-14 \leq xy \leq 0$ (3)

الحالة 4:

$0 \leq x \leq 2$ و $0 \leq y \leq 1$

و منه : $0 \leq xy \leq 2$ (4)

من : (1) و (2) و (3) و (4) نستنتج أن :

$-14 \leq xy \leq 21$

تمرين 21: ليكن $1 \leq x \leq 2$ و $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

نضع : $E = x^2 - y^2 + x + y$

(1) اعط تأطيرا للعدد E

(2) تحقق أن : $E = (x+y)(x-y+1)$

واستنتج تأطيرا آخر للعدد E

(3) استنتج أن : $\frac{3}{4} \leq E \leq \frac{29}{4}$

الجواب (1): تأطير للعدد $E = x^2 - y^2 + x + y$

لدينا $1 \leq x \leq 2$ و $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

اذن : $1 \leq x^2 \leq 4$ و $\frac{1}{4} \leq y^2 \leq \frac{9}{4}$

و منه : $-\frac{9}{4} \leq -y^2 \leq -\frac{1}{4}$

اذن : $1 - \frac{9}{4} + 1 + \frac{1}{2} \leq x^2 - y^2 + x + y \leq 4 - \frac{1}{4} + 2 + \frac{3}{2}$

و منه : $\frac{1}{4} \leq E \leq \frac{29}{4}$ (α)

(2) نتحقق من أن : $E = (x+y)(x-y+1)$ ؟؟؟

لدينا $E = x^2 - y^2 + x + y$

اذن : $E = (x+y)(x-y) + x + y$

اذن : $E = (x+y)(x-y+1)$

استنتاج : لدينا $1 \leq x \leq 2$ و $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

اذن : $\frac{3}{2} \leq x + y \leq \frac{7}{2}$ (1) و لدينا $-\frac{3}{2} \leq -y \leq -\frac{1}{2}$

اذن : $1 - \frac{3}{2} \leq x - y \leq 2 - \frac{1}{2}$ يعني $-\frac{1}{2} \leq x - y \leq \frac{3}{2}$

يعني $\frac{1}{2} \leq x - y + 1 \leq \frac{7}{4}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن :

$\frac{3}{4} \leq (x+y)(x-y+1) \leq \frac{49}{8}$

$\frac{3}{4} \leq E \leq \frac{49}{8}$ (β) ومنه تأطير آخر للعدد E

استنتاج (3)

من العلاقتين (α) و (β) نستنتج أن :

$E \in \left[\frac{1}{4}; \frac{29}{4}\right] \cap \left[\frac{3}{4}; \frac{49}{8}\right]$

يعني $E \in \left[\frac{3}{4}; \frac{29}{4}\right]$ أي $\frac{3}{4} \leq E \leq \frac{29}{4}$

تمرين 22: ليكن $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}$ و $|2x+y| \leq \frac{2}{3}$

بين أن : $\frac{y}{x} \in \left[-4; -\frac{1}{2}\right]$

الجواب: تأطير العدد y أولا :

$-\frac{2}{3} \leq 2x + y \leq \frac{2}{3}$ يعني $|2x+y| \leq \frac{2}{3}$

ولدينا $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}$ اذن : $1 \leq 2x \leq \frac{4}{3}$ يعني $-\frac{4}{3} \leq -2x \leq -1$

ومنه $-\frac{2}{3} - \frac{4}{3} \leq y \leq \frac{2}{3} - 1$ ومنه $-2 \leq y \leq -\frac{1}{3}$

ومنه $\frac{1}{3} \leq -y \leq 2$

ولدينا أيضا : $\frac{3}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 2$

اذن : $\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \leq \frac{1}{x} \times (-y) \leq 4$

اذن : $\frac{1}{2} \leq -\frac{y}{x} \leq 4$ اذن : $-4 \leq \frac{y}{x} \leq -\frac{1}{2}$

يعني $\frac{y}{x} \in \left[-4; -\frac{1}{2}\right]$

تمرين 23: التّأطير و العمليات

1. تحقق من أن : $14^2 < 200 < 15^2$

ثم استنتج أن : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

2. بنفس الطريقة أوجد تأطيرا للعدد $\sqrt{5}$.

3. استنتج تأطيرا للعددين $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ و $\sqrt{10}$.

الجواب (1): لدينا $14^2 = 196$ و $15^2 = 225$

ومنه $14^2 < 200 < 15^2$

لدينا $14^2 < 200 < 15^2$ إذن نستنتج أن : $\sqrt{14^2} < \sqrt{200} < \sqrt{15^2}$

إذن : $\sqrt{14^2} < \sqrt{2 \times 100} < \sqrt{15^2}$ أي : $14 < \sqrt{2} \times 10 < 15$

أي : $14 \times \frac{1}{10} < \sqrt{2} \times 10 \times \frac{1}{10} < 15 \times \frac{1}{10}$

إذن نستنتج أن : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

(2) لدينا $22^2 = 484$ و $23^2 = 529$ ومنه $22^2 < 500 < 23^2$

لدينا $22^2 < 500 < 23^2$ إذن نستنتج أن : $\sqrt{22^2} < \sqrt{500} < \sqrt{23^2}$

إذن : $\sqrt{14^2} < \sqrt{2 \times 100} < \sqrt{15^2}$ أي : $22 < \sqrt{5} \times 10 < 23$

أي : $22 \times \frac{1}{10} < \sqrt{5} \times 10 \times \frac{1}{10} < 23 \times \frac{1}{10}$

إذن نستنتج أن : $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$

(3) لدينا $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ و $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$

إذن : $1,4 + 2,2 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 1,5 + 2,3$ أي : $3,6 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 3,8$

و أيضا بضرب طرف طرف نجد : $1,4 \times 2,2 < \sqrt{2} \times \sqrt{5} < 1,5 \times 2,3$

أي : $3,08 < \sqrt{10} < 3,45$

تمرين 24:

أكتب بدون رمز القيمة المطلقة الأعداد التالية:

$$(1) |\sqrt{2} - 2| \quad (2) |3 - 2\sqrt{3}| \quad (3) |\sqrt{5} - \sqrt{2}|$$

$$(4) A = |4 - 2\sqrt{3}| - |5 - 3\sqrt{3}| + |9 - 5\sqrt{3}|$$

الجواب:

(1) لدينا $\sqrt{2} < 2$ إذن : $\sqrt{2} - 2 \in \mathbb{R}^-$ ومنه

$$|\sqrt{2} - 2| = -(\sqrt{2} - 2) = -\sqrt{2} + 2$$

(2) لدينا $3 < 2\sqrt{3}$ لأن : $3^2 < (2\sqrt{3})^2$

إذن : $3 - 2\sqrt{3} \in \mathbb{R}^-$ ومنه $|3 - 2\sqrt{3}| = -(3 - 2\sqrt{3}) = -3 + 2\sqrt{3}$

(3) لدينا $\sqrt{5} > \sqrt{2}$ إذن : $\sqrt{5} - \sqrt{2} \in \mathbb{R}^+$ ومنه $|\sqrt{5} - \sqrt{2}| = \sqrt{5} - \sqrt{2}$

$$(4) A = |4 - 2\sqrt{3}| - |5 - 3\sqrt{3}| + |9 - 5\sqrt{3}|$$

$$A = 4 - 2\sqrt{3} - (-(5 - 3\sqrt{3})) + (5\sqrt{3} - 9)$$

$$A = 4 - 2\sqrt{3} + 5 - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 9 = 0$$

تمرين 25:

$$1. \text{ أحسب : } (3\sqrt{2} - 5)^2$$

2. قارن العددين : $3\sqrt{2}$ و 5

3. بسط : $\sqrt{43 - 30\sqrt{2}}$

$$(1) \text{ الجواب : } (3\sqrt{2} - 5)^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 5 + (5)^2 = 18 - 30\sqrt{2} + 25 = 43 - 30\sqrt{2}$$

$$(3\sqrt{2} - 5)^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 5 + (5)^2 = 43 - 30\sqrt{2}$$

(2) لمقارنة العددين نقارن مربعيهما : $18 = (3\sqrt{2})^2$ و $25 = (5)^2$

إذن $3\sqrt{2} > 5$ ومنه $3\sqrt{2} - 5 \in \mathbb{R}^-$

$$(3) \sqrt{43 - 30\sqrt{2}} = \sqrt{(3\sqrt{2} - 5)^2} = |3\sqrt{2} - 5|$$

$$= -(3\sqrt{2} - 5) \quad \text{لأن : } 3\sqrt{2} - 5 \in \mathbb{R}^-$$

$$\text{وبالتالي : } \sqrt{43 - 30\sqrt{2}} = -3\sqrt{2} + 5$$

تمرين 26:

(1) قارن العددين : $2\sqrt{7}$ و $3\sqrt{3}$

(2) أنشر $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2$

(3) نضع : $A = \sqrt{55 - 12\sqrt{21}}$ بسط A

(4) إذا علمت أن : $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ وأن : $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$

اعط تقريبا للعدد A الى 0,5 بتقريب وافراط

الجواب

(1) مقارنة العددين : $2\sqrt{7}$ و $3\sqrt{3}$

لمقارنة العددين نقارن مربعيهما : $27 = (3\sqrt{3})^2$ و $28 = (2\sqrt{7})^2$

إذن $(2\sqrt{7})^2 > (3\sqrt{3})^2$ ومنه $2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}$

$$(2) (3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2 = (3\sqrt{3})^2 - 2 \times 3\sqrt{3} \times 2\sqrt{7} + (2\sqrt{7})^2$$

$$(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2 = 27 - 12\sqrt{21} + 28 = 55 - 12\sqrt{21}$$

(3) نضع : $A = \sqrt{55 - 12\sqrt{21}}$

يعني : $A = \sqrt{(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2}$ يعني : $A = |3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}|$

ومنه : $A = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}$ لأن : $3\sqrt{3} - 2\sqrt{7} > 0$

(4) لدينا $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ إذن : $5,1 < 3\sqrt{3} < 5,4$

ومنه : $-5,4 < -3\sqrt{3} < -5,1$

ولدينا $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$ إذن : $5,2 < 2\sqrt{7} < 5,4$

ومنه : $5,2 - 5,4 < 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} < 5,4 - 5,1$

يعني : $-0,2 < A < 0,3$

لدينا $0,3 - (-0,2) = 0,5$

إذن : 0,3 هي قيمة مقربة للعدد A الى 0,5 بافراط

و -0,2 هي قيمة مقربة للعدد A الى 0,5 بتقريب

تمرين 27: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية : (1) $|x - 1| = 5$

$$(2) |x + 2| = -1 \quad (3) |2x + 1| = |x - 3|$$

الجواب (1): $|x - 1| = 5$ يعني $x - 1 = 5$ أو $x - 1 = -5$

يعني $x = 6$ أو $x = -4$ إذن : $S = \{-4; 6\}$

(2) المعادلة : $|x + 2| = -1$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$ لأن القيمة المطلقة

دائما موجبة إذن : $S = \emptyset$

$$(3) |2x + 1| = |x - 3| \text{ يعني } 2x + 1 = x - 3 \text{ أو } 2x + 1 = -(x - 3)$$

يعني $x = -4$ أو $2x + 1 = -x + 3$ يعني $x = -4$ أو $x = \frac{2}{3}$

إذن : $S = \left\{-4; \frac{2}{3}\right\}$

تمرين 28: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية : (1) $|x - 1| \leq 2$

$$(2) |x + 2| \geq 3 \quad (3) |2x + 1| < 6$$

الجواب (1): $|x - 1| \leq 2$ يعني $-2 \leq x - 1 \leq 2$ يعني

$$-2 + 1 \leq x - 1 + 1 \leq 2 + 1 \quad \text{يعني} \quad -1 \leq x \leq 3$$

إذن : $S = [-1; 3]$

$$(2) |x + 2| \geq 3 \text{ يعني } x + 2 \geq 3 \text{ أو } x + 2 \leq -3$$

يعني $x \geq 1$ أو $x \leq -5$ يعني $x \in [1; +\infty[$ أو $x \in]-\infty; -5]$

إذن : $S =]-\infty; -5] \cup [1; +\infty[$

$$x - y = 3: \text{ونعلم أن } E = 2x - 2y + 1 = 2(x - y) + 1$$

$$\text{ومنه: } E = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$(2) - \text{نبين أن: } -\frac{5}{2} \leq y \leq 1$$

$$\text{نعلم أن: } x - y = 3: \text{اذن: } x = y + 3$$

$$\text{ولدينا } x \geq \frac{1}{2}: \text{اذن: } y + 3 \geq \frac{1}{2}: \text{اذن: } y \geq \frac{1}{2} - 3$$

$$\text{اذن: } y \geq -\frac{5}{2} \text{ وبما أن } y \leq 1 \text{ فان: } -\frac{5}{2} \leq y \leq 1$$

$$- \text{نبين أن: } \frac{1}{2} \leq x \leq 4$$

$$\text{نعلم أن: } x - y = 3: \text{اذن: } y = x - 3$$

$$\text{ووجنا سابقا أن: } -\frac{5}{2} \leq y \leq 1$$

$$\text{اذن: } -\frac{5}{2} + 3 \leq x - 3 + 3 \leq 1 + 3 \text{ يعني } -\frac{5}{2} \leq x - 3 \leq 1$$

$$\text{ومنه: } \frac{1}{2} \leq x \leq 4$$

$$(3) \text{حساب قيمة العدد } F \text{ حيث: } F = |x + y - 5| + |x + y + 2|$$

$$\text{نبحث عن إشارة } x + y - 5$$

$$\text{ووجنا سابقا أن: } -\frac{5}{2} \leq y \leq 1 \text{ و } \frac{1}{2} \leq x \leq 4$$

$$\text{اذن: } -2 \leq x + y \leq 5 \text{ يعني } \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \leq x + y \leq 1 + 4$$

$$\text{يعني } -7 \leq x + y - 5 \leq 0 \text{ يعني } -2 - 5 \leq x + y - 5 \leq 5 - 5$$

$$\text{أي أن: } x + y - 5 \text{ سالب}$$

$$\text{نبحث عن إشارة } x + y + 2$$

$$\text{وجنا سابقا أن: } -2 \leq x + y \leq 5$$

$$\text{يعني } 0 \leq x + y + 2 \leq 7 \text{ يعني } -2 + 2 \leq x + y + 2 \leq 5 + 2$$

$$\text{أي أن: } x + y + 2 \text{ موجب}$$

$$\text{اذن: } F = |x + y - 5| + |x + y + 2| = -(x + y - 5) + x + y + 2$$

$$\text{اذن: } F = -x - y + 5 + x + y + 2 = -x - y + 5 + x + y + 2 = 7$$

$$\text{تمرين 31: ليكن } a \text{ و } b \text{ عددين حقيقيين بحيث: } a \geq -2 \text{ و } b \leq -1 \text{ و } a - b = 6$$

$$(1) \text{أحسب قيمة العدد } A \text{ حيث: } A = \sqrt{(a+2)^2} + \sqrt{(b+1)^2}$$

$$(2) \text{بين أن: } a \leq 5 \text{ و } b \geq -8$$

$$(3) \text{أحسب قيمة العدد } F \text{ حيث: } F = |a + b - 4| + |a + b + 10|$$

$$\text{الجواب: (1) } a + 2 \geq 0 \text{ يعني } a \geq -2$$

$$b + 1 \leq 0 \text{ يعني } b \leq -1$$

$$\text{ولدينا } A = \sqrt{(a+2)^2} + \sqrt{(b+1)^2} = |a+2| + |b+1|$$

$$A = a + 2 - (b + 1) = a - b + 1 = 6 + 1 = 7$$

$$(4) - \text{نبين أن: } a \leq 5$$

$$\text{نعلم أن: } b \leq -1 \text{ و } a - b = 6 \text{ يعني } a - 6 = b \text{ و } a - 6 \leq -1$$

$$\text{يعني } a \leq 5$$

$$- \text{نبين أن: } b \geq -8$$

$$\text{نعلم أن: } a \geq -2 \text{ و } a - b = 6 \text{ يعني } a - 6 \geq -2$$

$$\text{يعني } b \geq -8$$

$$(3) \text{لدينا } -8 \leq b \leq -1 \text{ و } -2 \leq a \leq 5$$

$$\text{اذن: } -10 \leq a + b \leq 4$$

$$(3) |2x+1| < 6 \text{ يعني } -6 < 2x+1 < 6 \text{ يعني } -6-1 < 2x+1-1 < 6-1$$

$$\text{يعني } -7 < 2x < 5 \text{ يعني } -7 \times \frac{1}{2} < 2x \times \frac{1}{2} < 5 \times \frac{1}{2}$$

$$\text{يعني } -\frac{7}{2} < x < \frac{5}{2} \text{ اذن: } s = \left] -\frac{7}{2}; \frac{5}{2} \right[$$

تمرين 29: الى أي مجال ينتمي العدد x في الحالات التالية:

$$(1) -5 < x \leq 3$$

$$(2) x \geq 10 \text{ أو } x < 7$$

$$(3) x > 1 \text{ و } x < 2$$

$$(4) |x-2| < 1$$

$$(5) |x+1| \geq 2$$

$$(6) 1 < |x-1| < 2$$

$$\text{الجواب: (1) } -5 < x \leq 3 \text{ يعني } x \in]-5; 3]$$

$$(2) x < 7 \text{ أو } x \geq 10 \text{ يعني } x \in]-\infty; 7] \text{ أو } x \in [10; +\infty[$$

$$\text{يعني } x \in]-\infty; 7] \cup [10; +\infty[$$

$$(3) \text{طريقة 1}$$

$$x < 2 \text{ و } x > 1 \text{ يعني } x \in]-\infty; 2[\text{ و } x \in]1; +\infty[$$

$$\text{يعني } x \in]-\infty; 2[\cap]1; +\infty[$$

$$\text{يعني } x \in]1; 2[$$

$$\text{طريقة 2}$$

$$x < 2 \text{ و } x > 1 \text{ يعني } 1 < x < 2 \text{ يعني } x \in]1; 2[$$

$$(4) |x-2| < 1 \text{ يعني } -1 < x-2 < 1 \text{ يعني } -1+2 < x-2+2 < 1+2$$

$$\text{يعني } 1 < x < 3 \text{ يعني } x \in]1; 3[$$

$$(5) |x+1| \geq 2 \text{ يعني } x+1 \geq 2 \text{ أو } x+1 \leq -2$$

$$\text{يعني } x \geq 1 \text{ أو } x \leq -3 \text{ يعني } x \in]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$$

$$(6) 1 < |x-1| < 2 \text{ يعني } \begin{cases} |x-1| < 2 \\ |x-1| > 1 \end{cases}$$

$$\text{يعني } \begin{cases} -1 < x < 3 \\ \text{و} \\ x < 0 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} -2 < x-1 < 2 \\ \text{و} \\ x-1 < -1 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} -1 < x < 3 \\ \text{و} \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\text{يعني } x \in]-1; 3[\cap (]-\infty; 0] \cup]2; +\infty[)$$

$$\text{يعني } x \in]-1; 0] \cup]2; 3[$$

$$\text{تمرين 30: ليكن } x \text{ و } y \text{ عددين حقيقيين بحيث: } y \leq 1 \text{ و } x \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{و } x - y = 3$$

$$1. \text{أحسب قيمة العدد } E \text{ حيث: } E = \sqrt{(2x-1)^2} + \sqrt{(2y-2)^2}$$

$$2. \text{بين أن: } \frac{1}{2} \leq x \leq 4 \text{ و } -\frac{5}{2} \leq y \leq 1$$

$$3. \text{أحسب قيمة العدد } F \text{ حيث: } F = |x + y - 5| + |x + y + 2|$$

$$\text{الجواب: (1) } E = \sqrt{(2x-1)^2} + \sqrt{(2y-2)^2} = |2x-1| + |2y-2|$$

$$\text{لدينا } x \geq \frac{1}{2} \text{ يعني } 2x \geq 1 \text{ يعني } 2x - 1 \geq 0$$

$$\text{ولدينا } y \leq 1 \text{ يعني } 2y \leq 2 \text{ يعني } 2y - 2 \leq 0$$

$$\text{ومنه: } E = |2x-1| + |2y-2| = 2x-1 - (2y-2)$$

(3) بين أن : 1,1 هي قيمة مقربة للعدد $\sqrt{1,2}$ بالدقة $\frac{1}{30}$

الجواب: لدينا: $a \geq 1$ نضع $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a}}$

(1) نبين أن : $a(A+1)(A-1) = 1$ ؟؟

$$\text{لدينا } (A+1)(A-1) = A^2 - 1 = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{a}}\right)^2 - 1$$

$$(A+1)(A-1) = 1 + \frac{1}{a} - 1 = \frac{1}{a}$$

$$\text{اذن : } (A+1)(A-1) = \frac{1}{a}$$

$$\text{ومنه : } a(A+1)(A-1) = 1$$

(2) نبين أن : $2 \leq A+1 \leq 3$

$$\text{لدينا } a \geq 1 > 0 \text{ اذن : } \frac{1}{a} \geq 0$$

$$\text{ومنه : } \frac{1}{a} + 1 \geq 1 \text{ يعني } A \geq 1 \text{ ومنه : } A+1 \geq 2 \quad (1)$$

$$\text{لدينا } a \geq 1 \text{ اذن : } \frac{1}{a} \leq 1 \text{ ومنه : } 1 + \frac{1}{a} \leq 2$$

$$\text{ومنه : } A \leq \sqrt{2} \text{ ومنه : } A+1 \leq \sqrt{2} + 1 \leq 3 \quad (2)$$

$$\text{من (1) و (2) : نستنتج أن : } 2 \leq A+1 \leq 3$$

الاستنتاج :

$$\text{لدينا } 2 \leq A+1 \leq 3 \text{ ولدينا } a(A+1)(A-1) = 1$$

$$\text{يعني : } A-1 = \frac{1}{a(A+1)}$$

$$\text{ومن جهة أخرى لدينا : } \frac{1}{3} \leq \frac{1}{A+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{اذن : } \frac{1}{3a} \leq A-1 \leq \frac{1}{2a} \text{ ومنه : } \frac{1}{3a} \leq \frac{1}{a(A+1)} \leq \frac{1}{2a}$$

$$\text{ومنه : } \frac{1}{3a} + 1 \leq A \leq \frac{1}{2a} + 1$$

$$(3) \text{ لدينا } 1,2 = 1 + 0,2 = 1 + \frac{1}{5}$$

$$\text{يعني : } A = \sqrt{1,2} = \sqrt{1 + \frac{1}{5}} \text{ يعني : } a = 5$$

$$\frac{1}{15} + 1 \leq \sqrt{1,2} \leq \frac{1}{10} + 1$$

$$\frac{16}{15} \leq \sqrt{1,2} \leq \frac{11}{10}$$

$$\frac{32}{30} \leq \sqrt{1,2} \leq \frac{33}{30} \quad \left(\frac{33}{30} = 1,1\right)$$

$$\text{و لدينا } \frac{33}{30} - \frac{32}{30} = \frac{1}{30}$$

$$\text{اذن : } 1,1 \text{ هي قيمة مقربة للعدد } \sqrt{1,2} \text{ بالدقة } \frac{1}{30}$$

$$\text{يعني } 0 \leq a+b+10 \leq 14 \text{ و } -14 \leq a+b-4 \leq 0$$

$$\text{اذن : } |a+b-4| = -(a+b-4) = -a-b+4$$

$$\text{و } |a+b+10| = a+b+10$$

$$\text{ولدينا } B = |a+b-4| + |a+b+10|$$

$$\text{اذن : } B = |a+b-4| + |a+b+10| = -a-b+4 + a+b+10$$

$$\text{اذن : } B = 14$$

تمرين 32: نعلم أن $\sqrt{7} = 2,6457513110 \dots\dots\dots$

$$1. \text{ حدد قيمة مقربة للعدد } \sqrt{7} \text{ بالدقة } 10^{-3} \text{ بتقريب.}$$

$$2. \text{ حدد قيمة مقربة للعدد } \sqrt{7} \text{ بالدقة } 10^{-3} \text{ بإفراط.}$$

$$3. \text{ حدد قيمة مقربة للعدد } \sqrt{7} \text{ بالدقة } 5 \times 10^{-4} \text{ بتقريب.}$$

الجواب: من التأطير $2,645 \leq \sqrt{7} \leq 2,646$

$$1. \text{ العدد } 2,645 \text{ قيمة مقربة للعدد } \sqrt{7} \text{ بالدقة } 10^{-3} \text{ بتقريب.}$$

$$2. \text{ العدد } 2,646 \text{ قيمة مقربة للعدد } \sqrt{7} \text{ بالدقة } 10^{-3} \text{ بإفراط.}$$

$$3. \text{ العدد } 2,6455 \text{ قيمة مقربة للعدد } \sqrt{7} \text{ بالدقة } 5 \times 10^{-4} \text{ بتقريب.}$$

تمرين 33: لدينا $(\pi \approx 3.1415926\dots\dots)$

$$\text{حدد قيمة مقربة للعدد } \pi \text{ بالدقة } 10^{-2} \text{ بتقريب و بإفراط}$$

الجواب: $3.14 < \sqrt{10} < 3.15$

$$\text{ولدينا : } 3.15 - 3.14 = 0.01 = 10^{-2} \text{ اذن}$$

$$\bullet \text{ العدد } 3.14 \text{ قيمة مقربة للعدد } \pi \text{ بالدقة } 10^{-3} \text{ بتقريب.}$$

$$\bullet \text{ العدد } 3.15 \text{ قيمة مقربة للعدد } \pi \text{ بالدقة } 10^{-3} \text{ بإفراط.}$$

تمرين 34:

$$\text{أوجد التقريب العشري للعدد } \sqrt{10} \text{ بالدقة } 10^{-3} \text{ بتقريب (استعمل المحسبة).}$$

$$(\sqrt{10} \approx 3.16227766)$$

الجواب: $3.162 < \sqrt{10} < 3.163$

$$\text{ولدينا : } 3.163 - 3.162 = 0.001 = 10^{-3} \text{ اذن}$$

$$\bullet \text{ العدد } 3.162 \text{ قيمة مقربة للعدد } \sqrt{7} \text{ بالدقة } 10^{-3} \text{ بتقريب.}$$

$$\bullet \text{ العدد } 3.163 \text{ قيمة مقربة للعدد } \sqrt{7} \text{ بالدقة } 10^{-3} \text{ بإفراط.}$$

تمرين 35: حدد الجزء الصحيح للعدد $\sqrt{2}$

$$\text{الجواب: لدينا : } 1 \leq \sqrt{2} \leq 2 \text{ و منه فان } E(\sqrt{2}) = 1$$

تمرين 36: أوجد التقريب العشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-4} بتقريب

$$(\text{استعمل المحسبة}). \text{ علما أن : } (\sqrt{3} \approx 1.732050808\dots\dots)$$

الجواب: لدينا: $1,732 \leq \sqrt{3} < 1,733$

$$\text{أي } (1732) \cdot 10^{-3} \leq \sqrt{3} < (1732+1) \cdot 10^{-3}$$

$$\text{إذن : } 1,732 \text{ هو تقريب عشري للعدد } \sqrt{3} \text{ بالدقة } 10^{-3} \text{ بتقريب.}$$

$$\text{و } 1,733 \text{ هو تقريب عشري للعدد } \sqrt{3} \text{ بالدقة } 10^{-3} \text{ بإفراط.}$$

تمرين 37: ليكن $a \geq 1$ نضع $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a}}$

$$(1) \text{ بين أن : } a(A+1)(A-1) = 1$$

$$(2) \text{ بين أن : } 2 \leq A+1 \leq 3$$

$$\text{واستنتج أن : } 1 + \frac{1}{3a} \leq A \leq 1 + \frac{1}{2a}$$