

تمرين رقم 1 :

- (1) بين أن العدد 26820 قابل للقسمة على 2 و 3 و 4 و 5 و 9 .
- (2) حدد قيمة n لكي يكون العدد $n15n$ مضاعفا للأعداد 2 و 4 و 3 و 9 بحيث $0 \leq n \leq 9$.
- (3) بين أن العدد $36 \times 5 \times 7 + 27$ مضاعف للعدد 9 .
- (4) بين أن العدد $2 \times 9 \times 7 + 3$ عدد فردي .

الحل :

- (1) ** رقم وحدات العدد 26820 هو 0 إذن العدد 26820 قابل للقسمة على 2 و 5 .
** مجموع أرقام العدد 26820 هو $2 + 6 + 8 + 2 + 0 = 18$ من مضاعفات العددين 3 و 9 إذن العدد 26820 قابل للقسمة على 3 و 9 .
** رقمي الوحدات و العشرات للعدد 26820 يكونان العدد 20 من مضاعفات 4 إذن العدد 26820 قابل للقسمة على 4 .
ومنه العدد 26820 قابل للقسمة على 2 و 3 و 4 و 5 و 9 .
- (2) ** لكي يكون العدد $n15n$ من مضاعفات العدد 2 يكفي أن يكون n عدد زوجي محصور بين 0 و 9 بمعنى قيم n هي 0 أو 2 أو 4 أو 6 أو 8
** لكي يكون العدد $n15n$ من مضاعفات العدد 4 يكفي أن يكون العدد $5n$ من مضاعفات 4 و بما أن مضاعفات العدد 4 المحصورة بين 50 و 59 هي 52 و 56 فإن قيمة n هي 2 أو 6 .
إذن $n = 2$ أو $n = 6$.
** لكي يكون العدد $n15n$ من مضاعفات العدد 3 و 9 يكفي أن يكون العدد $n + 1 + 5 + n = 2n + 6$ من مضاعفات العدد 9 .
إذا كان $n = 2$ فإن $n + 1 + 5 + n = 2n + 6 = 2 \times 2 + 6 = 10$ ليست من مضاعفات 9 .
إذا كان $n = 6$ فإن $n + 1 + 5 + n = 2n + 6 = 2 \times 6 + 6 = 12 + 6 = 18$ من مضاعفات 3 و 9 .
ومنه قيمة العدد n هي 6 .
- (3) العدد n يكون مضاعفا للعدد 9 إذا كان يوجد عدد صحيح k بحيث $n = 9k$ (تذكير)
لدينا :
$$42 \times 5 \times 7 \times 12 + 27 = 3 \times 14 \times 5 \times 7 \times 3 \times 4 + 9 \times 3$$
$$= 3 \times 3 \times 14 \times 5 \times 7 \times 4 + 9 \times 3$$
$$= 9 \times 14 \times 5 \times 7 \times 4 + 9 \times 3$$
$$= 9 \times (14 \times 5 \times 7 \times 4 + 3)$$

ومنه يوجد k بحيث $k = (14 \times 5 \times 7 \times 4 + 3)$ و $n = 9k$ ومنه n مضاعفا للعدد 9 .
- (4) لكي يكون العدد n فرديا يكفي أن يوجد عدد صحيح k بحيث $n = 2k + 1$ (تذكير)
لدينا :
$$2 \times 9 \times 7 + 3 = 2 \times (9 \times 7) + 2 \times 1 + 1 = 2[(9 \times 7) + 1] + 1$$

ومنه يوجد عدد صحيح k بحيث $k = [(9 \times 7) + 1]$ و $n = 2k + 1$ و بالتالي n عدد فردي .

تمرين رقم 2 :

- نعتبر العددين الصحيحين الطبيعيين $a = 2646$ و $b = 2100$.
- (1) فكك العددين a و b إلى جداء عوامل أولية .

(2) بسط $\frac{a}{b}$.

(3) بسط $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$.

(4) فكك العدد $c = a^3 b^2$ إلى جداء عوامل أولية .

الحل :

(1) *** تفكيك العدد $a = 2646$.

2646	2
1323	3
441	3
147	3
49	7
7	7
1	

ومنه $2664 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7 = 2 \times 3^3 \times 7^2$.

2100	2
1050	2
525	3
175	5
35	5
7	7
1	

ومنه $2100 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$

(2) لنبس $\frac{a}{b}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{2664}{2100} = \frac{2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7}{2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7} = \frac{3 \times 3 \times 7}{2 \times 5 \times 5} = \frac{63}{50}$$

(3) لنبس $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$.

$$\sqrt{a} = \sqrt{2664} = \sqrt{2 \times 3^3 \times 7^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{3^3} \times \sqrt{7^2} = \sqrt{2} \times 3\sqrt{3} \times 7 = 21\sqrt{6} \quad **$$

$$\sqrt{b} = \sqrt{2100} = \sqrt{2^2 \times 3 \times 7} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{7} = 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{21} \quad **$$

$$c = a^3 b^2 = (2 \times 3^3 \times 7^2)^3 \times (2^2 \times 3 \times 7)^2 = 2^3 \times 3^9 \times 7^6 \times 2^4 \times 3^2 \times 7^2 = 2^7 \times 3^{11} \times 7^8$$

(4) لدينا :

تمرين رقم 3 :

نعتبر العددين الصحيحين الطبيعيين $a = 1400$ و $b = 1540$.

(1) فكك العددين a و b إلى جداء عوامل أولية.

(2) أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

(3) أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b .

الحل :

(1) فكك العددين $a = 1400$ و $b = 1540$ إلى جداء عوامل أولية.

1540	2
770	2
385	5
77	7
11	11
1	

1400	2
700	2
350	2
175	5
35	5
7	7
1	

ومنه : $a = 1400 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 7 = 2^3 \times 5^2 \times 7$

و $b = 1540 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 11 = 2^2 \times 5 \times 7 \times 11$

(2) القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو جداء العوامل الأولية المشتركة مرفوعة إلى أصغر أس.

بما أن : $a = 2^3 \times 5^2 \times 7$ و $b = 2^2 \times 5^1 \times 7 \times 11$ فإن $PGCD(a, b) = 2^2 \times 5^1 \times 7 = 140$.

(3) المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو جداء العوامل الأولية الغير مشتركة و المشتركة مرفوعة إلى أكبر أس.

بما أن $a = 2^3 \times 5^2 \times 7$ و $b = 2^2 \times 5^1 \times 7 \times 11$ فإن $PPCM(a, b) = 2^3 \times 5^2 \times 7 \times 11 = 15400$.

تمرين رقم 4 :

(1) بين أن العدد $A = 5^{n+2} - 5^n$ من مضاعفات العدد 3 لكل n عدد صحيح طبيعي.

(2) فكك العدد $B = 10^3 \times 35$ إلى جداء عوامل أولية.

(3) حدد قيمة العدد الصحيح الطبيعي n بحيث يكون $n+4$ قاسما للعدد $n+17$.

الحل :

(1) ليكن n عدد صحيح طبيعي.

$$A = 5^{n+2} - 5^n = 5^n (5^2 - 1) = 5^n (25 - 1) = 5^n \times 24 = 24 \times 5^n = 3 \times (8 \times 5^n)$$

ومنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث $A = 3k$

و بالتالي : العدد A من مضاعفات العدد 3.

(2) لدينا : $B = 10^3 \times 35 = (2 \times 5)^3 \times 5 \times 7 = 2^3 \times 5^3 \times 5 \times 7 = 2^3 \times 5^4 \times 7$

(3) لدينا : $n+17 = (n+4) + 13$ ومنه فإن $n+4$ قاسما للعدد $n+17$ يعني $n+4$ قاسما للعدد 13 .

ونعلم أن قواسم العدد 13 هما : 1 و 13 ومنه فإن $n+4=1$ أو $n+4=13$.

المعادلة $n+4=1$ ليس لها حل لأن n عدد صحيح طبيعي .

المعادلة $n+4=13$ لها حل واحد هو 9 ومنه قيمة العدد n لكي يكون $n+4$ قاسما للعدد $n+17$ هو $n=9$.

تمرين رقم 5 :

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين بحيث $a > 2b$.

(1) بين أن العددين $a-2b$ و $a+2b$ لهما نفس الزوجية .

(2) حل في $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ المعادلة $a^2 - 4b^2 = 36$.

الحل :

(1) لدينا : $(a+2b) + (a-2b) = a+2b+a-2b = 2a$ ومنه فإن المجموع $(a+2b) + (a-2b)$ عدد زوجي .

وبالتالي فإن العددين $(a+2b)$ و $(a-2b)$ زوجيين أو فرديين إذن العددين $a-2b$ و $a+2b$ لهما نفس الزوجية .

(2) لدينا : $a^2 - 4b^2 = 36$ يعني $(a+2b)(a-2b) = 36$.

إذن $(a+2b)$ و $(a-2b)$ قاسمان للعدد 36 ونعلم أن قواسم العدد 36 هي : 1 و 2 و 3 و 4 و 6 و 9 و 12 و 18 و 36 .

و حسب السؤال 1 لدينا العددين $a-2b$ و $a+2b$ لهما نفس الزوجية ومنه فإن $\begin{cases} a+2b=6 \\ a-2b=6 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a+2b=18 \\ a-2b=2 \end{cases}$ ($a+2b \geq a-2b$)

** لنحل النظام التالية $\begin{cases} a+2b=18 \\ a-2b=2 \end{cases}$

بطريقة التآلفية الخطية لدينا : $\begin{cases} a+2b=18 \\ a+2b+a-2b=18+2 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a+2b=18 \\ 2a=20 \end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases} a+2b=18 \\ a=10 \end{cases}$ و بتعويض $a=10$ نحصل على $2b=8$ ومنه $b=4$. إذن حل النظام هو الزوج $(10,4)$

** لنحل النظام التالية $\begin{cases} a+2b=6 \\ a-2b=6 \end{cases}$ بنفس الطريقة نحصل على الحل $(6,0)$.

أخيرا المعادلة $a^2 - 4b^2 = 36$ تقبل حلين في $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ هما $(10,4)$ و $(6,0)$.

تمرين رقم 6 :

(1) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

بين أن $n^2 + n$ عدد زوجي .

(2) بين أن العدد $n^2 + 5n + 3$ عدد فردي

(3) بين أن العدد $n^4 - n^2$ مضاعف للعدد 4 .

الحل :

(1) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

لدينا : $n^2 + n = n(n+1)$

الحالة 1 :

إذا كان n عددا زوجيا فإن $n+1$ عدد فردي ومنه الجداء $n(n+1)$ عدد زوجي .

الحالة 2 :

إذا كان n عددا فرديا فإن $n+1$ عدد زوجي ومنه الجداء $n(n+1)$ عدد زوجي .

وبالتالي فإن $n(n+1)$ عدد زوجي لكل n عدد صحيح طبيعي .

(2) لدينا : $n^2 + 5n + 3 = (n^2 + n) + 4n + 3$

الطريقة 1 :

نعلم أن $n^2 + n$ عدد زوجي و $4n$ عدد زوجي إذن $(n^2 + n) + 4n$ عدد زوجي و بما أن 3 عدد فردي فإن $(n^2 + n) + 4n + 3$ عدد فردي

ومنه فإن العدد $n^2 + 5n + 3$ عدد فردي .

الطريقة 2 :

بما أن $n^2 + n$ عدد زوجي (حسب السؤال 1) فإنه يوجد عدد صحيح k بحيث $n^2 + n = 2k$.

و العدد $4n$ عدد زوجي لأن $4n = 2(2n)$.

و العدد 3 يكتب $3 = 2 + 1$.

إذن : $n^2 + 5n + 3 = (n^2 + n) + 4n + 3 = 2k + 2(2n) + 2 + 1 = 2(k + 2n + 1) + 1$

ومنه العدد $n^2 + 5n + 3$ عدد فردي لأنه يوجد عدد k' بحيث $n^2 + 5n + 3 = 2k' + 1$.

(3) يكون العدد a مضاعفا للعدد 4 إذا كان $a = 4k$ بحيث k عدد صحيح طبيعي .

$$n^4 - n^2 = (n^2 - n)(n^2 + n) \quad \text{لدينا :}$$

ونعلم حسب السؤال الأول أن العدد $n^2 + n$ عدد زوجي إذن يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث $n^2 + n = 2k$.

و بنفس الطريقة العدد $n^2 - n$ عدد زوجي إذن يوجد عدد صحيح طبيعي k' بحيث $n^2 - n = 2k'$.

إذن : $n^4 - n^2 = (n^2 - n)(n^2 + n) = 2k \times 2k' = 4kk'$ ومنه العدد $n^4 - n^2$ من مضاعفات العدد 4 .