هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

عثماني نجيب

الجذع مشترك علمي

الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية

1. ترتيب ومقارنة :

a) بصفة عامة :

مقارنة عددين تعني البحث عن أكبرهما

لمقارنة عددين نعتمد على الفرق ، حيث لدينا $(b \geq a) \Leftrightarrow (b-a \geq 0) \Leftrightarrow (a \leq b)$

مثال: a و b عددان غير منعدمان مختلفي الإشارة $(a+b)^2$ و a^2+b^2

لدينا $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ وبالتالي $(a+b)^2-(a^2+b^2) = 2ab$ ® 0 نستنتج أن (a^2+b^2) ® $(a+b)^2$:

b) مقارنة الكسور الموجبة:

نذكر بالقواعد التالية الخاصة بكسرين بسطيهما ومقاميهما موجبان:

- إذا كان لكسرين نفس المقام، فإن أكبرهما هو الذي له أكبر بسط : $\frac{2}{17} \leq \frac{13}{17}$
- إذا كان لكسرين نفس البسط، فإن أكبرهما هو الذي له أصغر مقام : $\frac{17}{13} \leq \frac{17}{2}$
- بصفة عامة لمقارنة كسرين أو أكثر، نوحد مقامات الكسور ثم نستعمل القاعدة الأولى:

لمقارنة الكسور $\frac{2}{3}$; $\frac{13}{18}$; $\frac{5}{6}$ نوحد المقامات أولا ، لدينا : $\frac{2}{3} = \frac{12}{18}$; $\frac{13}{18} = \frac{13}{18}$; $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$ حسب **القاعدة** الأولى لدينا $\frac{12}{18}$ ® $\frac{13}{18}$ ® $\frac{15}{18}$ نستنتج بالتالي أن : $\frac{2}{3}$ ® $\frac{13}{18}$ ® $\frac{5}{6}$

c) مقارنة الكسور مع العدد 1:

نذكر بالقواعد التالية:

- إذا كان البسط يساوي المقام فإن الكسر يساوي 1 : $\frac{17}{17} = 1$
- و إذا كان البسط أكبر من المقام فإن الكسر أكبر من 1 : $1 \leq \frac{23}{17}$
- و إذا كان البسط أصغر من المقام فإن الكسر أصغر من 1. $\frac{15}{17} \leq 1$

d) مقارنة أعداد يحتوي بعضها على جذور الموجبة:

- في الحالات البسيطة غالبا ما نلتجئ إلى مقارنة المربعات وفق إحدى القاعدتين :

$(0 \leq x \leq y) \Leftrightarrow (0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{y})$ أو $(0 \leq x \leq y) \Leftrightarrow (0 \leq x^2 \leq y^2)$

لمقارنة الأعداد 9 ; $7\sqrt{2}$; $5\sqrt{3}$ نحسب المربعات : $9^2 = 81$; $\left(7\sqrt{2}\right)^2 = 98$; $\left(5\sqrt{3}\right)^2 = 75$

لدينا 98 ® 81 ® 75 ، نستنتج بالتالي أن : $5\sqrt{3} \leq 9 \leq 7\sqrt{2}$

- لكن اللجوء الى المربعات من البداية لا يمكن من المقارنة بل ربما يزيد الأمور تعقيدا . في هذه الحالة يمكن الاستعانة بالفرق في البداية ثم مقارنة المربعات بعد التأكد من أن الأعداد التي نريد مقارنتها موجبة:

لمقارنة العددين $a = 7\sqrt{3}+11$; $b = 5\sqrt{3}-7$. نتحقق أولا من إشارتي العددين :

لدينا العدد a ® 0 لأنه مجموع عددين موجبين. أما العدد b فهو على شكل فرق عددين ، لدينا :

$7^2 = 49$; $\left(5\sqrt{3}\right)^2 = 75$ ، بما أن 49 ¤ 75 فإن 7 ¤ $5\sqrt{3}$ وبالتالي 0 ¤ $b = 5\sqrt{3}-7$

نستنتج في النهاية أن : a ® 0 و b ® 0

حساب المربعات سوف لن يؤدي إلا الى تعقيد الحساب دون التوصل الى مقارنة العددين ولكم أن تجربوا ذلك بأنفسكم.

لنحسب الفرق أولا ، نجد : $a-b = 7\sqrt{3}+11-5\sqrt{3}+7 = 2\sqrt{3}+18$ ¤ 0 . ومنه a ¤ b .

لمقارنة العددين $a = 7\sqrt{3}-11$; $b = 5\sqrt{3}-7$. نتحقق أولا من إشارتي العددين :

نتأكد بنفس الطريقة السابقة أن : a ® 0 و b ® 0

لنحسب الفرق أولا ، نجد : $a-b = 7\sqrt{3}-11-5\sqrt{3}+7 = 2\sqrt{3}-4$.

لدينا :

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية

$4^2 = 16$; $\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12$ ، بما أن $12 \leq 16$ فإن $2\sqrt{3} \leq 4$ وبالتالي $2\sqrt{3} - 4 \leq 0$

ومنه نستنتج أن $a \leq b$

2. الترتيب والعمليات : نعرض في الجدول التالي أهم القواعد المستعملة في المقارنة

العملية	Propriété	Domaine	Opération
الجمع	$\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow a+c \leq b+d$;	$\forall a,b,c,d \in IR$;	Somme
الضرب في الأعداد الموجبة	$a \leq b \Rightarrow a \times c \leq b \times d$;	$\forall a \geq 0; \forall b \geq 0; \forall c \geq 0; \forall c \geq 0$;	Produit par des positifs
الضرب في عدد واحد	$a \leq b \Rightarrow a \times c \leq b \times d$ $a \leq b \Rightarrow a \times c \geq b \times d$	$\forall a;b \in IR; \forall c \geq 0$; $\forall a;b \in IR; \forall c \leq 0$;	Produit par un seul réel
المقابل	$a \leq b \Rightarrow -a \geq -b$	$\forall a;b \in IR$;	Opposé
مقلوب الأعداد الموجبة	$0 < a \leq b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$	$\forall a \neq 0$; $\forall b \neq 0$;	Inverse des positifs

قواعد القوى

$a^0 = 1$ (pour $a \neq 0$) ; $a^0 = a$; $a^2 = a \times a$

$a^n = a \times a \times \ldots\ldots \times a = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$

$a^n \times a^m = a^{n+m}$; $\left(a^n\right)^m = a^{n \times m}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$a^n \times b^n = (ab)^n$; $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Attention!!....ne pas confondre avec les identités

$a^n + b^n \neq (a+b)^n$; $a^n - b^n \neq (a-b)^n$

قواعد الجذور المربعة

$\sqrt{a}^2 = a$ (pour $a \geq 0$) ; $\sqrt{a^2} = |a|$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (pour $a \geq 0, b \geq 0$)

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (pour $a \geq 0, b \geq 0$)

Attention!!....

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$; $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$

القوى والجذور	$0 \leq a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq a^n \leq b^n$ $0 \leq a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$	$\forall a \geq 0; \forall b \geq 0; \forall n \in IN^*$; $\forall a \geq 0; \forall b \geq 0; \forall n \in IN^*$;	Puissances et racines

قواعد القيم المطلقة

$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$; $|x \times y| = |x| \times |y|$; $\begin{cases} |x| = x \Leftrightarrow x \geq 0 \\ |x| = -x \Leftrightarrow x \leq 0 \end{cases}$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\left||x| + |y|\right| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$; $\begin{cases} |x| < r \Leftrightarrow -r < x < r \Leftrightarrow x \in]-r,r[\\ |x| > r \Leftrightarrow (x > -r \text{ ou } x > r) \Leftrightarrow x \in]-\infty,-r[\cup]r,+\infty[\end{cases}$

قيمة مقربة :

نقول أن العدد x هو قيمة مقربة للعدد A إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$x \in]A-r, A+r[$ أي $A-r < x < A+r$ أي $|x-A| < r$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma