



تقارين وحلولها

تمرين 1 :

$$D_{75} = \{1, 3, 15, 25, 75\}$$

2 - من خلال السؤال 1 فإن :

$$\text{PGCD}(28, 75) = 1$$

3 - بما أن $\text{PGCD}(28, 75) = 1$ فإن

28 و 75 أوليان فيما بينهما.

تمرين 3 :

فكك الأعداد التالية إلى جداء عوامل أولية :

$$735 - 1449 - 2225 - 86625 - 11730$$

الجواب :

تفكيك العدد 11730

11730	2
5865	5
1173	3
391	17
23	23
1	

$$11730 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 23$$

تفكيك العدد 86625

86625	5
17325	5
3465	5
693	3
231	3
77	7
11	11
1	

1 - حدد لائحة قواسم العددين 42 و 70

2 - استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين

42 و 70.

الجواب :

1 - قواسم العدد 42 هي :

$$D_{42} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$$

قواسم العدد 70 هي :

$$D_{70} = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$$

2 - من خلال ما سبق فإن أكبر قاسم مشترك

لـ 42 و 70 هو 14.

$$\text{PGCD}(42, 70) = 14 \quad \text{إذن}$$

تمرين 2 :

1 - حدد لائحة قواسم العددين 28 و 75

2 - استنتج $\text{PGCD}(28, 75)$

3 - ماذا تستنتج بالنسبة لـ 28 و 75.

الجواب :

1 - قواسم العدد 28 هي :

$$D_{28} = \{1, 2, 4, 14, 28\}$$

قواسم العدد 75 هي :





الجواب :

(1) مضاعفات العدد 12 هي :
 $M_{12} = \{ 12, 24, 36, 48, 60, 72, \dots \}$

مضاعفات العدد 8 هي :
 $M_8 = \{ 8, 16, 24, 32, 40, 48, \dots \}$

إذن $\text{ppmc}(12, 8) = 24$

(2) مضاعفات العدد 9 هي :
 $M_9 = \{ 9, 18, 27, 36, 45, 54, \dots \}$

مضاعفات العدد 4 هي :
 $M_4 = \{ 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, \dots \}$

إذن $\text{ppmc}(9, 4) = 36$

(3) مضاعفات العدد 5 هي :
 $M_5 = \{ 5, 10, 15, 20, 25, 30, \dots \}$

مضاعفات العدد 20 هي :
 $M_{20} = \{ 20, 40, 60, 80, \dots \}$

ومنه $\text{ppmc}(5, 20) = 20$

تمرين 5 :

1 - بين أن $n^2 + n$ عدد زوجي لكل $n \in \mathbb{N}$

2 - بين أنه إذا كان n زوجي فإن n^2 عدد

زوجي حيث $n \in \mathbb{N}$

الجواب :

1 - ليكن $n \in \mathbb{N}$ لدينا

وبالتالي $86625 = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$

تفكيك العدد 2225

$$\begin{array}{r|l} 2225 & 5 \\ 445 & 5 \\ 89 & 89 \\ 1 & \end{array}$$

وبالتالي $2225 = 5^2 \cdot 89$ (العدد 89 عدد أولي)

تفكيك العدد 1449

$$\begin{array}{r|l} 1449 & 3^2 \\ 161 & 7 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array}$$

وبالتالي $1449 = 3^2 \cdot 7 \cdot 23$

تفكيك العدد 735

$$\begin{array}{r|l} 735 & 5 \\ 147 & 7 \\ 21 & 7 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

وبالتالي $735 = 5 \cdot 7^2 \cdot 3$

تمرين 4 :

حدد المضاعف المشترك الأصغر للعددين

a و b في كل حالة :

(1) $a = 12$; $b = 8$

(2) $a = 3$; $b = 4$

(3) $a = 5$; $b = 20$



الجواب :

ليكن n عدد صحيح طبيعي بحيث n^2 زوجي

نفترض أن n فردي إذن $n = 2k + 1$

حيث $k \in \mathbb{N}$

$$n^2 = (2k + 1)^2 \quad \text{ومنه}$$

$$= 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 2(2k^2 + 2k) + 1$$

$$n^2 = 2p + 1 \quad \text{إذن}$$

$$p = 2k^2 + 2k \quad \text{حيث}$$

وبالتالي n^2 عدد فردي وهذا يناقض كون n^2 زوجي .

إذن الافتراض الأول خاطئ ومنه n عدد زوجي .

تمرين 7 :

ليكن $a = 27$ و $b = 24$

1 - حدد القاسم المشترك الأكبر لـ a و b

والمضاعف المشترك الأصغر لـ a و b

2 - تحقق أن

$$\text{PGCD}(a, b) \times \text{ppmc}(a, b) = ab$$

الجواب :

1- a- قواسم 27 هي : 1 ; 3 ; 9 ; 27

$$n^2 + n = n(n + 1)$$

إذا كان n زوجي فإن $n = 2k$ فإن $k \in \mathbb{N}$

$$n^2 + n = 2k(2k + 1) \quad \text{إذن}$$

$$= 2p$$

$$p = k(2k + 1) \quad \text{حيث}$$

ومنه $n^2 + n$ زوجي .

إذا كان n فردي فإن $n = 2k + 1$

فإن $k \in \mathbb{N}$

$$n^2 + n = (2k + 1)(2k + 1 + 1) \quad \text{إذن}$$

$$= (2k + 1)(2k + 2)$$

$$= 2(2k + 1)(k + 1)$$

$$= 2p'$$

$$p' = (2k + 1)(k + 1) \quad \text{حيث}$$

ومنه $n^2 + n$ عدد زوجي .

إذن في الحالتين فإن $n^2 + n$ عدد زوجي .

2 - ليكن $n \in \mathbb{N}$ بحيث n عدد زوجي إذن

$$n = 2p \quad \text{حيث } p \in \mathbb{N}$$

$$n^2 = 4p^2 = 2(2p^2) \quad \text{ومنه}$$

$$= 2k \quad \text{حيث } k = 2p^2$$

وبالتالي n^2 عدد زوجي .

تمرين 6 :

ليكن n عدد صحيح طبيعي

بين أنه إذا كان n^2 زوجي فإن n عدد زوجي



قواسم 24 هي :

$$24 ; 12 ; 8 ; 6 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1$$

$$\text{PGCD}(24, 27) = 3 \quad \text{إذن}$$

$$24 = 3 \cdot 2^3 \quad \text{و} \quad 27 = 3^3 \quad \text{لدينا}$$

إذن المضاعف المشترك الأصغر لـ 24 و 27

$$m = 3^3 \cdot 2^3 = 216 \quad \text{هو :}$$

$$\text{ppmc}(27, 24) = 216 \quad \text{ومنه}$$

2 - لدينا :

$$\text{PGCD}(a, b) \times \text{ppmc}(a, b) = 216 \cdot 3$$

$$= 648$$

$$ab = 27 \cdot 24 = 648$$

وبالتالي :

$$\text{PGCD}(a, b) \times \text{ppmc}(a, b) = ab$$

تمرين 8 :

a و b عددان صحيحان طبيعيان أوليان

فيما بينهما .

1 - بين أن :

$$(a + b) \wedge b = 1$$

$$(a + b) \wedge b = 1 \quad (\text{نقبل أن } a^2 \wedge b^2 = 1)$$

$$2 - a - \text{بين أن : } (n + 1) \wedge (n + 2) = 1$$

$$\text{ثم استنتج أن } \frac{2n+3}{n^2+3n+2} \text{ كسر غير}$$

قابل للاختزال.

b - تطبيق :

بين أن $\frac{39}{380}$ كسر غير قابل للاختزال.

الجواب :

$$1 - \text{لدينا } a \wedge b = 1$$

ليكن d القاسم المشترك الأكبر لـ b و a + b

$$\text{إذن d يقسم b و } a + b$$

$$\text{ومنه d يقسم } a + b - b \text{ أي } a$$

$$\text{إذن d يقسم a و b}$$

$$\text{إذن d يقسم } a \wedge b = 1$$

$$\text{ومنه } d = 1 \text{ وبالتالي : } (a + b) \wedge b = 1$$

$$\text{لدينا } a \wedge b = 1$$

ليكن d القاسم المشترك الأكبر لـ a + b

و ab.

$$\text{إذن d يقسم ab ويقسم } a + b$$

$$\text{ومنه d يقسم ab ويقسم } a(a + b)$$

$$\text{إذن d يقسم } a(a + b) - ab$$

$$\text{أي d يقسم } a^2$$

$$\text{كذلك d يقسم ab و } b(a + b)$$

$$\text{ومنه d يقسم } b(a + b) - ab$$

$$\text{أي d يقسم } b^2$$

$$\text{إذن d يقسم } a^2 \text{ و } b^2$$

$$\text{ومنه d يقسم } a^2 \wedge b^2 = 1 \text{ وبالتالي } d = 1$$

$$\text{ومنه } (a + b) \wedge ab = 1$$





$$b = 20 ; a = 5 \quad (3)$$

الجواب :

$$a = 12 = 3 \cdot 2^2 \quad \text{لدينا (1)}$$

$$b = 8 = 2^3$$

إذن المضاعف المشترك الأصغر هو :

$$a \vee b = 3^2 \cdot 2^2 = 24$$

$$a = 9 = 3^2 \quad \text{لدينا (2)}$$

$$b = 4 = 2^2$$

إذن المضاعف المشترك الأصغر لـ 9 و 4

$$a \vee b = 3^2 \cdot 2^2 = 36 \quad \text{هو :}$$

$$a \vee b = 36 \quad \text{وبالتالي :}$$

(3) لدينا 5 تقسم 20 إذن المضاعف

المشترك الأصغر لـ 5 و 20 هو :

$$20 \vee 5 = 20$$

تمرين 10 :

حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y في

الحالات التالية وذلك باستعمال خوارزمية

أقليدية

(طريقة القسومات المتتالية) :

$$y = 1085 ; x = 837 \quad -1$$

$$y = 9615 ; x = 5128 \quad -2$$

$$y = 1515 ; x = 1789 \quad -3$$

$$(n+1) \wedge (n+2) = d \quad \text{نضع } a-2$$

إذن d يقسم n+1 و d يقسم n+2

$$(n+2) - (n+1) = 1 \quad \text{ومنه d يقسم 1}$$

ومنه d = 1 وبالتالي :

$$(n+2) \wedge (n+1) = 1$$

نضع a = n+1 و b = n+2

$$a \wedge b = 1 \quad \text{لدينا}$$

$$(a+b) \wedge ab = 1 \quad \text{إذن}$$

$$(2n+3) \wedge (n^2+3n+2) = 1 \quad \text{أي}$$

$$a+b = 2n+3 \quad \text{لأن}$$

$$ab = n^2+3n+2 \quad \text{و}$$

ومنه $\frac{2n+3}{n^2+3n+2}$ كسر غير قابل للاختزال.

$$-b- \quad \text{لنحدد } n \text{ بحيث } 2n+3 = 39$$

$$n = 18 \quad \text{إذن}$$

$$2n+3 = 39 \quad \text{لدينا}$$

$$n^2+3n+2 = 380$$

وبما أن $\frac{2n+3}{n^2+3n+2}$ غير قابل للاختزال

$$\text{فإن } \frac{39}{380} \text{ غير قابل للاختزال}$$

تمرين 9 :

حدد المضاعف المشترك الأصغر لـ a و b في

كل حالة :

$$b = 8 ; a = 12 \quad (1)$$

$$b = 4 ; a = 9 \quad (2)$$





المرحلة	x	y	الباقى
1	1515	1789	274
2	274	1515	145
3	145	274	129
4	129	145	16
5	16	129	1
6	1	16	0

$$1789 = 1515 \times 1 + 274$$

$$1515 = 274 \times 5 + 145$$

$$274 = 145 \times 1 + 129$$

$$145 = 129 \times 1 + 16$$

$$129 = 16 \times 8 + 1$$

$$16 = 16 \times 1 + 0$$

$$1789 \wedge 1515 = 1 \quad \text{وبالتالي}$$

تمرين 11 :

1 - حدد $d = \text{PGCD}(102, 119)$

2 - تحقق من أن $\frac{102}{d}$ و $\frac{119}{d}$ أوليين فيما بينهما.

الجواب :

1- لدينا $199 = 102 \times 1 + 17$

$$102 = 17 \times 6 + 0$$

إذن حسب خوارزمية أقليدية فإن :

$$\text{PGCD}(102, 119) = 17$$

الجواب :

1 - لنحدد $1085 \wedge 837$

المرحلة	x	y	الباقى
1	837	1085	248
2	248	837	93
3	93	248	62
4	62	93	31
5	31	62	0

$$1085 = 837 \times 1 + 248$$

$$837 = 248 \times 3 + 93$$

$$248 = 93 \times 2 + 62$$

$$93 = 62 \times 1 + 31$$

$$62 = 31 \times 2 + 0$$

$$1085 \wedge 837 = 31 \quad \text{وبالتالي}$$

2 - لنحدد $9615 \wedge 5128$

المرحلة	x	y	الباقى
1	5128	9615	4487
2	4487	5128	641
3	641	4487	0

$$9615 = 5128 \times 1 + 4487$$

$$5128 = 4487 \times 1 + 641$$

$$4487 = 641 \times 7 + 0$$

$$9615 \wedge 5128 = 641 \quad \text{وبالتالي}$$

3 - لنحدد $1789 \wedge 1515$



ب - لنحدد القاسم المشترك الأكبر لـ
2332 و 47223

$$47223 = 2332 \times 20 + 583$$

$$2332 = 583 \times 4 + 0$$

$$47223 \wedge 2332 = 583 \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{3172}{915} = \frac{583 \times 4}{583 \times 81} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{2332}{47223} = \frac{4}{81} \quad \text{ومنه}$$

ب - لنحدد القاسم المشترك الأكبر لـ :

$$30227 \text{ و } 36019$$

$$36019 = 30227 \times 1 + 5792$$

$$30227 = 5792 \times 5 + 1267$$

$$5792 = 1267 \times 4 + 724$$

$$1267 = 724 \times 1 + 543$$

$$724 = 543 \times 1 + 181$$

$$543 = 181 \times 3 + 0$$

$$30227 \wedge 36019 = 181 \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{30227}{36019} = \frac{167 \times 181}{199 \times 181} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{30227}{36019} = \frac{167}{199} \quad \text{ومنه}$$

تمرين 13 :

حدد عددين صحيحين طبيعيين x و y بحيث :

$$xy = 3x + 2y$$

$$2 - \text{لدينا } \frac{119}{17} = 7 \text{ و } \frac{102}{17} = 6$$

$$6 \text{ و } 7 \text{ متتابعان إذن } 6 \wedge 7 = 1$$

$$\frac{119}{d} \wedge \frac{102}{d} = 1 \quad \text{ومنه}$$

$$\text{أي } \frac{119}{d} \text{ و } \frac{102}{d} \text{ أوليان فيما بينهما .}$$

تمرين 12 :

أجعل النسبة غير قابلة للأختزال في

الحالات التالية :

$$\frac{3172}{915} \quad \text{أ -}$$

$$\frac{2332}{47223} \quad \text{ب -}$$

$$\frac{30227}{36019} \quad \text{ج -}$$

الجواب :

أ - لنحدد القاسم المشترك الأكبر لـ 3172 و 915

$$3172 = 3 \times 915 + 427$$

$$915 = 2 \times 427 + 61$$

$$427 = 7 \times 61 + 0$$

$$915 \wedge 3172 = 61 \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{3172}{915} = \frac{61 \times 52}{61 \times 15} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{3172}{915} = \frac{52}{15} \quad \text{إذن}$$



الجواب :

1 - إذا كان $n = 9$ فإن :

$$F = \frac{9+9}{9-6} = \frac{18}{3} = 6$$

إذا كان $n = 25$ فإن :

$$F = \frac{25+9}{25-6} = \frac{34}{19}$$

وهذا هو الشكل المختزل لـ F لأن 34

و 19 أوليان فيما بينهما.

إذا كان $n = 46$ فإن :

$$F = \frac{46+9}{46-6} = \frac{55}{40} = \frac{11}{8}$$

وهذا الشكل المختزل لـ F .

2 - لدينا

$$1 + \frac{15}{n-6} = \frac{n-6+15}{n-6} = \frac{n+9}{n-6} = F$$

$$F = 1 + \frac{15}{n-6} \quad \text{وبالتالي}$$

$$F = 1 + \frac{15}{n-6} \quad \text{لدينا}$$

$$1 + \frac{15}{n-6} \in \mathbb{N} \quad \text{تكافئ} \quad F \in \mathbb{N}$$

$$\frac{15}{n-6} \in \mathbb{N} \quad \text{تكافئ}$$

يعني $n-6$ تقسم 15

يعني

$$n-6=1 \text{ أو } n-6=3 \text{ أو } n-6=5 \text{ أو } n-6=15$$

يعني

$$n=7 \text{ أو } n=9 \text{ أو } n=11 \text{ أو } n=21$$

إذن $F \in \mathbb{N}$ إذا وفقط إذا كان :

$$n=7 \text{ أو } n=9 \text{ أو } n=11 \text{ أو } n=21$$

الجواب :

$$xy - 3x = 2y \quad \text{يعني} \quad xy = 3x + 2y$$

$$x(y - 3) = 2y - 6 + 6 \quad \text{يعني}$$

$$x(y - 3) = 2(y - 3) + 6 \quad \text{يعني}$$

$$x(y - 3) - 2(y - 3) = 6 \quad \text{يعني}$$

$$(y - 3)(x - 2) = 6 \quad \text{يعني}$$

$$(y - 3)(x - 2) = 2 \times 3 = 1 \times 6 \quad \text{يعني}$$

$$y - 3 = 3 \quad \text{و} \quad x - 2 = 2 \quad \text{يعني}$$

$$y - 3 = 1 \quad \text{و} \quad x - 2 = 6 \quad \text{أو}$$

$$y = 6 \quad \text{و} \quad x = 4 \quad \text{يعني}$$

$$y = 4 \quad \text{و} \quad x = 8 \quad \text{أو}$$

$$S = \{(4, 6); (8, 4)\} \quad \text{إذن}$$

تمرين 14 :

ليكن n عدد صحيح طبيعي .

$$F = \frac{n+9}{n-6} \quad \text{نضع}$$

1 - حدد في كل حالة الشكل المختزل لـ F

$$n = 46 \quad ; \quad n = 25 \quad ; \quad n = 9$$

$$F = 1 + \frac{15}{n-6} \quad \text{2 - بين أن}$$

3 - حدد جميع قيم n التي من أجلها يكون F

عدد صحيح طبيعي .

