

مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية و مبادئ في الحسابيات

القدرات المنتظرة

*- توظيف الزوجية وتفكيك عدد إلى جداء عوامل أولية في حل بعض المسائل البسيطة حول الأعداد الصحيحة الطبيعية.

I) مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية

1- مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية

نشاط

من بين الأعداد التالية حدد تلك التي تمثل أعدادا صحيحة طبيعية
 5 ، $\sqrt{3}$ ، $4+16$ ، $\frac{5}{2}$ ، $12-23$ ، $\frac{15}{3}$ ، $\sqrt{25}$ ، $2,15$

تعريف

الأعداد $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ تسمى أعدادا صحيحة طبيعية و تكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية نرمز لها بـ $\mathbb{N}$
 نكتب $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots \rightarrow\}$

مصطلحات و ترميز

*- العدد 0 يسمى العدد الصحيح الطبيعي المنعدم
 - مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية الغير المنعدمة نرمز لها بالرمز $\mathbb{N}^$
 $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; 4; 5; \dots \rightarrow\}$

تمرين

أتمم بأحد الرمز $\in$ أو $\notin$
 $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} \dots \mathbb{N}$; $\sqrt{2} \dots \mathbb{N}^*$; $0 \dots \mathbb{N}^*$; $-5 \dots \mathbb{N}$; $3 \dots \mathbb{N}^*$; $\frac{24}{2} \dots \mathbb{N}$

2- الأعداد الزوجية – الأعداد الفردية

أنشطة

1- أعط كل الأعداد الزوجية المحصورة بين 41 و 65
 2- لنرمز لمجموعة الأعداد الزوجية بـ P و مجموعة الأعداد الفردية بـ I ،
 أتمم بأحد الرمز $\in$ أو $\notin$
 $2\sqrt{3} \dots P$; $4 \times 17 \dots P$; $4 \times 17 \dots I$; $0 \dots I$; $0 \dots P$; $5 \times 13 \dots I$
 3- ليكن a و b عددين صحيحين زوجيين و c و d عددين صحيحين فرديين
 حدد زوجية الأعداد التالية (هل الأعداد زوجية أم فردية) مع تعليل الجواب
 $a+c$; $c+d$; $a+b$

تعريف

نقول إن العدد الصحيح الطبيعي a عدد زوجي إذا وفقط كان يوجد عدد صحيح طبيعي k حيث $a = 2k$
 نقول إن العدد الصحيح الطبيعي a عدد فردي إذا وفقط كان يوجد عدد صحيح طبيعي k حيث $a = 2k + 1$

أمثلة

الأعداد $0, 2, 4, 6, 8, \dots$ أعداد زوجية
 الأعداد $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ أعداد فردية

ملاحظات

*- كل عدد صحيح طبيعي هو إما عدد زوجي أو عدد فردي
 *- مجموع عددين زوجيين هو عدد زوجي
 مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي
 مجموع عدد زوجي و عدد فردي هو عدد فردي

تمرين

1- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا
 أدرس زوجية كل من $n(n+1)$ و $n+(n+1)+(n+2)$ و $4n^2 + 4n + 1$
 2- ليكن n و m عددين صحيحين طبيعيين حيث $m > n$

بين أن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية

الحل

- 1- * n و $n+1$ عددان صحيحان طبيعيين متتاليان ومنه أحدهما زوجي و الآخر فردي و التالي جداؤهما زوجي إذن $n(n+1)$ زوجي
- * لدينا $3(n+1) = n + (n+1) + (n+2)$ و التالي زوجية $n + (n+1) + (n+2)$ هي زوجية $n+1$ إذا كان n زوجيا فان $n + (n+1) + (n+2)$ فرديا
- إذا كان n فرديا فان $n + (n+1) + (n+2)$ زوجيا
- * لدينا $4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$ و حيث أن $(2n^2 + 2n) \in \mathbb{N}$ فان $4n^2 + 4n + 1$ فردي

- 2- n و m عددان صحيحان طبيعيين حيث $m > n$
نبين أن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية
العدد $(m-n)$ يمكن أن يكون زوجيا أو فرديا
- * إذا كان $(m-n)$ زوجيا فانه يوجد k من $\mathbb{N}$ حيث $m-n=2k$ بإضافة $2n$ لطرفي المتفاوتة نحصل على $m+n=2k+2n=2(k+n)$ وحيث أن $k+n \in \mathbb{N}$ فان $m+n$ زوجي
- * إذا كان $(m-n)$ فرديا فانه يوجد k من $\mathbb{N}$ حيث $m-n=2k+1$ بإضافة $2n$ لطرفي المتفاوتة نحصل على $m+n=2k+2n+1=2(k+n)+1$ وحيث أن $k+n \in \mathbb{N}$ فان $m+n$ فرديا
- إذن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية

(II) - مضاعفات عدد - قواسم عدد

(A) مضاعفات عدد

1- أنشطة

نشاط 1

1- ضع الرمز $\times$ في المكان المناسب

2210	211	999	121	33	75	50	24	
								مضاعف 2
								مضاعف 3
								مضاعف 5
								مضاعف 11

- 2- استخرج من بين أعداد السطر الأول المضاعفات المشتركة للعددين 2 و 3 ثم 3 و 11

نشاط 2

- حدد المضاعفات العشرة الأولى للعدد 6 ثم للعدد 9
استنتج المضاعفات المشتركة من بين هذه المضاعفات
ماذا تلاحظ
(اصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين 6 و 9 هو 18 . المضاعفات المشتركة للعددين 6 و 9 هي مضاعفات العدد 18)

نشاط 2

- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا
- أ- تأكد $n^2 - 1$ مضاعف للعدد 8 في الحالات التالية $n=1$; $n=3$; $n=5$; $n=7$
- ب- بين أن $n^2 - 1$ مضاعف للعدد 8 كيفما كان العدد الصحيح الطبيعي الفردي n

الحل

- ب- ليكن n عدد صحيح طبيعي فردي أي يوجد k من $\mathbb{N}$ حيث $n=2k+1$
- لدينا $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ ومنه $n^2 - 1 = 4k(k+1)$
- وحيث أن $k(k+1)$ عدد زوجي (لأنه جداء عددين متتاليين)
- فانه يوجد k' من $\mathbb{N}$ حيث $k(k+1) = 2k'$ و بالتالي $n^2 - 1 = 8k'$
- إذن $n^2 - 1$ مضاعف للعدد 8

2- تعريف

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين حيث b غير منعدم
نقول إن العدد a مضاعف للعدد b إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح طبيعي k حيث $a = bk$

أمثلة

الأعداد 0 ، 5 ، 10 ، 15 ، 20 ، 25 ، 1775 مضاعفات للعدد 5
22 ليس مضاعف للعدد 4

3- *

ليكن $b \in \mathbb{N}^*$

مضاعفات b هي الأعداد kb حيث $k \in \mathbb{N}$

$$0 \times k = 0$$

خاصية

* لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم ما لنهاية من المضاعفات
* للعدد 0 مضاعف وحيد هو 0

4- المضاعف المشترك الأصغر

تعريف

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين
المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين
 a و b نرمز له بالرمز $PPCM(a; b)$

$$PPCM(6; 10) = 30 \quad , \quad PPCM(4; 9) = 36$$

أمثلة

(B) قواسم عدد

1- نشاط

حدد قواسم 90 ثم قواسم 126 ثم استنتج أكبر قاسم مشترك للعددين 90 و 126

2- تعريف

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين حيث b غير منعدم
نقول إن العدد b قاسم للعدد a إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح طبيعي k حيث $a = bk$

ملاحظة : العدد b قاسم للعدد a إذا وفقط إذا العدد a مضاعف للعدد b

نقول أيضا العدد a قابل للقسمة على b

- كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم مخالفا لـ 1 له على الأقل قاسمان 1 و نفسه
- للعدد 1 قاسم وحيد هو نفسه
- جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية الغير المنعدمة تقسم 0

3- القاسم المشترك الأكبر لعددين

تعريف

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين
القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو أكبر قاسم مشترك لهما
نرمز له بالرمز $PGCD(a; b)$

$$PGCD(4; 9) = 1 \quad , \quad PGCD(126; 90) = 18$$

مثال

(III) الأعداد الأولية

1- تعريف

نسمة عددا أوليا كل عدد صحيح طبيعي له قاسمان بالضبط

أمثلة (حدد الأعداد الأولية الأصغر من 40)

الأعداد الأولية الأصغر من 40 هي 2 ، 3 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ، 19 ، 23 ، 29 ، 31 ، 37

2- التفكير إلى جداء عوامل أولية لعدد غير أولي

مبرهنة (مقبولة)

كل عدد صحيح طبيعي n ($n \geq 2$) هو عدد أولي أو جداء عوامل أولية

أمثلة

41 عدد أولي

72 عدد غير أولي و $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$

تعريف

ليكن a عددا صحيحا طبيعيا غير أولي
كتابة a على شكل جداء عوامله أولية تسمى " التفكيك إلى جداء عوامل أولية " للعدد a

أمثلة

فكك الأعداد 24 ، 319 ، 1344 إلى جداء عوامل أولية
 $1344 = 4 \times 4 \times 4 \times 21 = 2^6 \times 3 \times 7$ $319 = 11 \times 29$ و $24 = 8 \times 3 = 2^3 \times 3$

تقنية للتفكيك (نقبلها)

مثال:		
1344	2	لتفكيك عدد صحيح طبيعي غير منعدم a نأخذ اصغر عدد أولي يقسم a و ننجز القسمة فنحصل على عدد b خارج القسمة فنأخذ اصغر عدد أولي يقسم b فنحصل على خارج القسمة و نتابع على هذا المنوال حتى نحصل على خارج يساوي 1.
672	2	
336	2	
168	2	
84	2	
42	2	
21	3	
7	7	
1		العدد a سيكون هو جداء جميع الأعداد الأولية التي قسمنا بها
إذن $1344 = 2^6 \times 3 \times 7$		

3- خاصيات (نقبلها)

خاصية 1

المضاعف المشترك الأصغر لعددتين هو جداء العوامل الأولية المشتركة و الغير المشتركة بين تفكيكي هذين العددين إلى جداء عوامل أولية. المرفوعة إلى أكبر أس.

خاصية 1

القاسم المشترك الأكبر لعددتين هو جداء العوامل الأولية المشتركة بين تفكيكي هذين العددين إلى جداء عوامل أولية. المرفوعة إلى أصغر أس.

ملاحظات $PPCM(a;a) = a$ ، $PPCM(a;1) = a$ ، $PGCD(a;a) = a$ ، $PGCD(a;1) = 1$

تمرين:

حدد $PPCM(35;121)$ ، $PGCD(35;121)$ ، $PPCM(84;216)$ ، $PGCD(84;216)$

إضافات

* **طريقة لتحديد المضاعف المشترك الأصغر للعددتين a و b حيث $a \geq b$**
أحدد مضاعفات a ثم أتأكد بالتتابع ابتداء من أصغر مضاعف غير منعدم للعدد a هل هو مضاعف للعدد b فإذا كان الجواب لا ، أتابع البحث إن كان نعم ، أتوقف و العدد الذي حصلت فيه على هذا الجواب هو المضاعف المشترك الأصغر للعددتين a و b .

* **طريقة لتحديد القاسم المشترك الأكبر للعددتين a و b حيث $a \geq b$**
أحدد قواسم العدد b ثم أتأكد بالتتابع تناقصيا ابتداء من أكبر قاسم للعدد b هل هو قاسم للعدد a فإذا كان الجواب لا ، أتابع البحث إن كان نعم ، أتوقف و العدد الذي حصلت فيه على هذا الجواب هو القاسم المشترك الأكبر للعددتين a و b .

* **طريقة لتحديد ما إذا كان العدد a أوليا أم لا**
نحدد أولا جميع الأعداد الأولية p حيث $p^2 \leq a$.
إذا كان a يقبل القسمة على أحد هذه الأعداد فإن a غير أولي
إذا كان a لا يقبل القسمة على أي عدد من هذه الأعداد فإن a أولي