



تصحيح الفرض الثاني

أولمبياد الرياضيات

المستوى : أجزع المشترك العلمي

التعريف الأول

لدينا a و b عددين حقيقيين بحيث : $-2 \leq a \leq 1$ و $-1 \leq b \leq 2$:

لدينا : $-1 \leq b \leq 2$	لدينا : $-2 \leq a \leq 1$
إذن : $-3 \leq b-2 \leq 0$	إذن : $-1 \leq a+1 \leq 2$
يعني : $0 \leq (b-2)^2 \leq 9$	يعني : $0 \leq (a+1)^2 \leq 4$
أي : $0 \leq b^2 - 4b + 4 \leq 9$	أي : $0 \leq a^2 + 2a + 1 \leq 4$
أي : $-4 \leq b^2 - 4b \leq 5$	ومن : $(1) : -1 \leq a^2 + 2a \leq 3$
ومن : $(2) : -5 \leq -b^2 + 4b \leq 4$	

بجمع (1) و (2) نجد : $-1-5 \leq a^2 + 2a - b^2 + 4b \leq 3+4$
وبالتالي فإن : $-6 \leq a^2 - b^2 + 2a + 4b \leq 7$

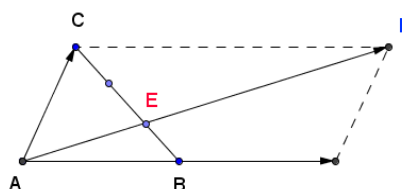
التعريف الثاني

لدينا : $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})}$
إذن : $= \sqrt{2^2 - \sqrt{2+\sqrt{2}}^2}$
 $= \sqrt{4 - (2+\sqrt{2})}$
 $= \sqrt{2-\sqrt{2}}$
إذن حسب ما سبق لدينا : $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}$
إذن : $= \sqrt{2} \cdot \sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$
يعني : $= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2^2 - \sqrt{2}^2}$
إذن : $= \sqrt{2} \cdot \sqrt{4-2}$
وبالتالي : $= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$



التعريف الثالث

لدينا : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



وحيث أن : $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ أي : $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BE}$

فإن : $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BE}$

إذن : $= 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) = 3\overrightarrow{AE}$

إذن : $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AE}$

وبالتالي: النقط A و E و D مستقيمية.

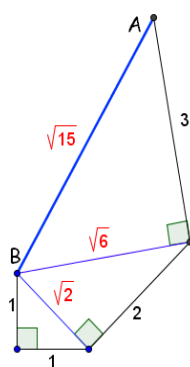
التعريف الرابع

لدينا : $\sqrt{6}^2 = 2^2 + \sqrt{2}^2$ و $\sqrt{15}^2 = 3^2 + \sqrt{6}^2$

$\sqrt{2}^2 = 1^2 + 1^2$ و

وباستعمال مبرهنة فيثاغورس على ثلاث مثلثات - انظر الشكل -

نحصل على القطعت $[AB]$ طولها $AB = \sqrt{15}$.



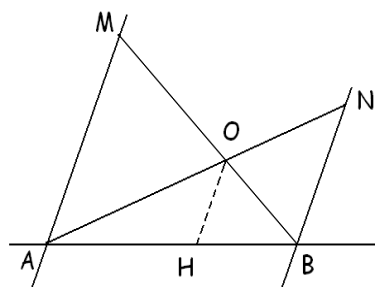
التعريف الخامس

- نعتبر المثلث AMB لدينا $(AM) \parallel (OH)$ إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة :

$$(1) : \frac{OH}{AM} = \frac{BH}{BA}$$

- نعتبر المثلث ANB لدينا $(BN) \parallel (OH)$ إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة :

$$(2) : \frac{OH}{BN} = \frac{AH}{AB}$$



نجمع (1) و (2) نجد : $\frac{OH}{AM} + \frac{OH}{BN} = \frac{AH}{AB} + \frac{BH}{BA}$

وحيث أن : $AH + BH = AB$ و $H \in [AB]$

فإن : $OH \left(\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} \right) = \frac{AH + BH}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$

ومنه : $OH \left(\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} \right) = 1$

$$\frac{1}{OH} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{BN}$$

وبالتالي :