



تصحيح الفرض الأول

أولمبياد الرياضيات

المستوى : أجزع المشترك العلمي

التعريف الأول

لدينا x عدد حقيقي :

$$1- \text{لدينا : } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = x^2 + x + 1$$

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

إذن : لكل $x \in \mathbb{R}$

-2

لدينا :

لدينا :

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1} + \frac{5}{3} = \frac{3(x^2 + x - 1) + 5(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1}$$

$$= \frac{8x^2 + 8x + 2}{x^2 + x + 1}$$

$$= \frac{2(2x+1)^2}{x^2 + x + 1} \geq 0$$

$$(2) : -\frac{5}{3} \leq \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1}$$

ومنه :

$$-\frac{5}{3} \leq \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1} < 1$$

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1} - 1 = \frac{x^2 + x - 1 - x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1}$$

$$= \frac{\cancel{x^2} + \cancel{x} - 1 - \cancel{x^2} - \cancel{x} - 1}{x^2 + x + 1}$$

$$= \frac{-2}{x^2 + x + 1} < 0$$

$$(1) : \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1} < 1$$

ومنه :

من (1) و (2) نستنتج أن لكل $x \in \mathbb{R}$:

التعريف الثاني

لدينا : $b^4 + a^2c^2 = c^4 + a^2b^2$ يكافئ $b^4 + a^2c^2 - c^4 - a^2b^2 = 0$

يكافئ $b^4 - c^4 + a^2c^2 - a^2b^2 = 0$

يكافئ $(b^2 - c^2)(b^2 + c^2) - a^2(b^2 - c^2) = 0$

يكافئ $(b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2) = 0$

يكافئ $b^2 - c^2 = 0$ أو $b^2 + c^2 - a^2 = 0$

يكافئ $a^2 = b^2 + c^2$ أو $b = c$ لأن : $b > 0$ و $c > 0$

وبما أن : $b \neq c$ فإن : $b^4 + a^2c^2 = c^4 + a^2b^2$ يكافئ $a^2 = b^2 + c^2$

أي أن : $BC^2 = AC^2 + AB^2$

وحسب مبرهنة فيثاغورس العكسية فإن المثلث ABC قائم الزاوية في A



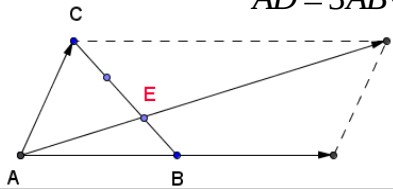
لدينا : $\vec{AD} = 2\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AB} + (\vec{AB} + \vec{BC}) = 3\vec{AB} + \vec{BC}$

التعريف الثالث

وحيث أن : $\vec{BE} = \frac{1}{3}\vec{BC}$ أي : $\vec{BC} = 3\vec{BE}$ فإن : $\vec{AD} = 3\vec{AB} + \vec{BC} = 3\vec{AB} + 3\vec{BE}$

إذن : $\vec{AD} = 3(\vec{AB} + \vec{BE}) = 3\vec{AE}$

إذن : $\vec{AD} = 3\vec{AE}$ وبالتالي : النقطة A و E و D مستقيمية.



1- لدينا لكل $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ إذن : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$

التعريف الرابع

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2 &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 - 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - 2 \cdot \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - 2 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)}\right)}_{=0} = 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

2- لدينا لكل $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2 = 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{وبالتالي :}$$

$$3- \text{ لدينا : } \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2} \quad \text{إذن : } \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2 = 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\text{إذن : } 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n(n+1)} > 0 \quad \text{لأن : } \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \left|1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{ومنه : } S = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2012^2} + \frac{1}{2013^2}}$$

$$\text{إذن : } = \left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2013}\right)$$

$$\text{يعني : } = \left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2013}\right)$$

$$\text{إذن : } = \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{2013} - \frac{1}{2013} = 2013 - \frac{1}{2013}$$

$$S = 2013 - \frac{1}{2013}$$

وبالتالي :