ثانوية ل تقدن ل تأهلية

نيابة سيدي البرنوصي

MATH-HOR

الموسم لدراسي : 2010-2011

تصحيح الفرض الأول

أولمبياد الرياضيات

المستوى : الجذع المشترك العلمي

التمرين الأول

لدينا a و b و c أعداد حقيقية موجبة قطعا ،

نضع : $A=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9$ يكفي أن نبين أن: $A\geq 0$ لدينا :

$$A=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1-9$$
$$A=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}-6$$
$$A=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}-2$$
$$A=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}+\frac{b^2+c^2-2bc}{bc}+\frac{c^2+a^2-2ca}{ca}$$
$$A=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca}\geq 0$$

لأن : $a>0$ و $b>0$ و $c>0$ و $(a-b)^2\geq 0$ و $(b-c)^2\geq 0$ و $(c-a)^2\geq 0$.

وبالتالي فإن :
$$\boxed{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9}$$

التمرين الثاني

لدينا :

$$S=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2010}+\sqrt{2011}}$$
$$S=\frac{1-\sqrt{2}}{1^2-\sqrt{2}^2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}^2-\sqrt{3}^2}+\ldots+\frac{\sqrt{2010}-\sqrt{2011}}{\sqrt{2010}^2-\sqrt{2011}^2}$$
$$S=\frac{1-\sqrt{2}}{-1}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1}+\ldots+\frac{\sqrt{2010}-\sqrt{2011}}{-1}$$
$$S=-1+\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt{2}}+\cancel{\sqrt{3}}-\ldots-\cancel{\sqrt{2010}}+\sqrt{2011}$$
$$S=-1+\sqrt{2011}$$

وبالتالي : $\boxed{S=\sqrt{2011}-1}$

التمرين الثالث

لدينا :

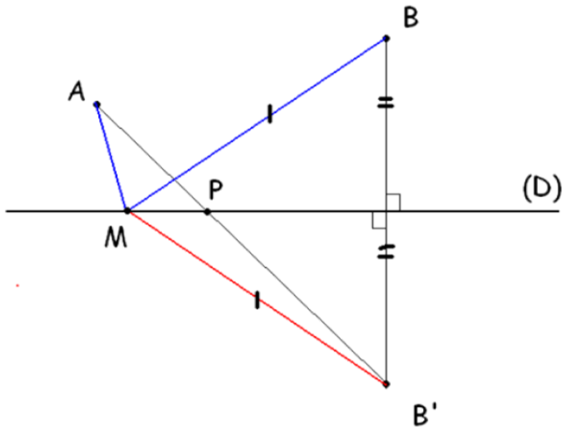
$$P(x)=x^4+4$$
$$P(x)=x^4+4x^2+4-4x^2$$
$$P(x)=\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2$$
$$P(x)=\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)$$

وبالتالي:

$$\boxed{P(x)=\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)}$$

التمرين الرابع

نعتبر (D) مستقيم و A و B نقطتان مختلفتان و لا ينتميان إلى (D).



نعتبر النقطة B' مماثلة النقطة B بالنسبة للمستقيم (D) و النقطة P تقاطع المستقيمين (D) و (AB')

لدينا : $MB=MB'$ $(*)$ لأن M تنتمي إلى المستقيم (D) وهو واسط القطعة $[BB']$

نعتبر المثلث AMB' نعلم أن كل ضلع من المثلث يكون دائما أصغر من مجموع الضلعين الآخرين و منه فإن : المسافة $AB'\leq AM+MB'$ ومن خلال $(*)$ فإن : $AB'\leq AM+MB$.

وحيث أن: $AB'=AP+PB'=AP+PB$ فإن: $\boxed{AP+PB\leq AM+MB}$

وهذا يعني أنه مهما كانت النقطة M من المستقيم (D) فإن المسافة $AM+MB$ تكون أصغر ما يمكن في حالة واحدة وهي $M=P$.