



الجدع مشترك علمي

نيابة وجدة

مدة الانجاز : ساعتان ونصف

ثانوية عبد الله العروي التأهيلية

السنة الدراسية : 2016-2017

تصحيح مباراة الأولمبياد في الرياضيات (المرحلة الأولى)

تمرين 1(3ن)

نضع : $A = \sqrt{57 - 40\sqrt{2}} - \sqrt{57 + 40\sqrt{2}}$

بين أن $A \in \mathbb{Z}$

الجواب :

نلاحظ أن : $57 - 40\sqrt{2} < 57 + 40\sqrt{2}$ إذن : $\sqrt{57 - 40\sqrt{2}} < \sqrt{57 + 40\sqrt{2}}$
ومنه : $A < 0$

نحسب A^2 : $A^2 = \left(\sqrt{57 - 40\sqrt{2}} - \sqrt{57 + 40\sqrt{2}} \right)^2$

$$A^2 = \left(\sqrt{57 - 40\sqrt{2}} \right)^2 - 2\sqrt{57 - 40\sqrt{2}}\sqrt{57 + 40\sqrt{2}} + \left(\sqrt{57 + 40\sqrt{2}} \right)^2$$

$$A^2 = 57 - 40\sqrt{2} - 2\sqrt{(57 - 40\sqrt{2})(57 + 40\sqrt{2})} + 57 + 40\sqrt{2}$$

إذن : $A^2 = 114 - 2\sqrt{57^2 - (40\sqrt{2})^2}$ أي : $A^2 = 114 - 2\sqrt{3249 - 3200}$

$A^2 = 114 - 2\sqrt{49}$ أي : $A^2 = 100$ يعني $A = \sqrt{100}$ أو $A = -\sqrt{100}$

ونعلم أن $A < 0$ إذن : $A = -\sqrt{100} = -10$

تمرين 2(2ن)

أحسب : $G = (2015200052004)^2 - (2015200052002 \times 2015200052006)$

الجواب : نلاحظ أن الأعداد الثلاثة تختلف فقط في رقم وحداتها لتبسيط الحساب

نضع : $x = 2015200052004$

إذن : $x+2 = 2015200052006$ و $x-2 = 2015200052002$

ومنه : $G = x^2 - (x-2)(x+2)$

يعني $G = x^2 - (x^2 - 2^2) = x^2 - x^2 + 4 = 4$

تمرين 3(4ن) : a و b عددين حقيقيين موجبين

بين أن : $(a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq 4ab$

الجواب :

$a \in \mathbb{R}$ نقارن : $2a$ و $a^2 + 1$

$$(a^2 + 1) - 2a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0$$

ومنه $a^2 + 1 \geq 2a$ مهما يكن : $a \in \mathbb{R}$

ثانوية عبد الله العروي التأهيلية

بنفس الطريقة نقارن : $b^2 + 1$ و $2b$

فنجد : $b^2 + 1 \geq 2b$

اذن وجدنا :
$$\begin{cases} a^2 + 1 \geq 2a \\ b^2 + 1 \geq 2b \end{cases}$$

وبضرب المتفاوتتين طرف لطرف نجد :

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq 4ab \quad \text{أي} \quad (a^2 + 1) \times (b^2 + 1) \geq 2a \times 2b$$

تمرين 4(4ن)

عمل : $A = x^4 - 6x^2 + 8$ و $B = x^4 + 1$

الجواب : $A = x^4 - 6x^2 + 8 = (x^2)^2 - 2 \times 3 \times x^2 + 3^2 - 1 = (x^2 - 3)^2 - 1$

$$A = (x^2 - 3)^2 - 1^2 = (x^2 - 3 - 1)(x^2 - 3 + 1) = (x^2 - 4)(x^2 - 2)$$

$$A = (x^2 - 2^2)(x^2 - 2) = (x - 2)(x + 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

$$B = x^4 + 1 = x^4 - 2x^2 + 2x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2$$

$$B = (x^2)^2 + 2x^2 \times 1 + 1^2 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2$$

$$B = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + 1 - \sqrt{2}x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}x)$$

$$B = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

تمرين 5(3ن)

$$A = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015} + \sqrt{2016}} + \frac{1}{\sqrt{2016} + \sqrt{2017}} \quad \text{أحسب :}$$

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{1(1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{-1} = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 \quad \text{الجواب :}$$

قمنا بالضرب في المرافق

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \quad \text{نقوم بنفس العملية بالنسبة ل :}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1} = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} = \sqrt{4} - \sqrt{3} \quad \text{ونجد} \quad \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} \quad \text{نقوم بنفس العملية بالنسبة ل :}$$

وهكذا نقوم بنفس العملية بالنسبة للباقي الى أن نصل الى :

$$\frac{1}{\sqrt{2015} + \sqrt{2016}} = \sqrt{2016} - \sqrt{2015}$$

ثانوية عبد الله العروي التأهيلية

$$\frac{1}{\sqrt{2016} + \sqrt{2017}} = \sqrt{2017} - \sqrt{2016}$$

ونعوض في : A

فنحصل على :

$$A = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{2016} - \sqrt{2015} + \sqrt{2017} - \sqrt{2016}$$

نلاحظ أن هناك أعداد متقابلة

$$A = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{2016} - \sqrt{2015} + \sqrt{2017} - \sqrt{2016}$$

وبعد التبسيط نجد :

$$A = \sqrt{2017} - 1$$

تمرين 6(4ن) أنظر الشكل جانبه

علما أن (C) دائرة قطرها $AB = 8cm$ والنقطة M تنتمي للدائرة بحيث

$BM = 4cm$ أحسب مساحة المستطيل $ABEF$

الجواب :

$M \in (C)$ وقطر الدائرة هو $[AB]$ اذن : المثلث ABM قائم الزاوية في M

ومنه حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فان : $AM^2 = AB^2 - MB^2$ أي : $AM^2 = 64 - 16$

أي : $AM^2 = 48$ أي : $AM = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}cm$

ولدينا : $(AB) \parallel (EF)$ لأن : $ABEF$ مستطيل ولدينا (BM) قاطع لهما

اذن : $\widehat{ABM} = \widehat{BME}$ (زاويتان متبادلتان داخليا)

ولدينا $\widehat{AMB} = \widehat{BEM} = 90^\circ$ لأن : المثلث قائم الزاوية في M و $ABEF$ مستطيل

اذن المثلثان : BMA و MEB متشابهان ومنه : $\frac{BM}{ME} = \frac{BA}{MB} = \frac{MA}{EB}$ (الأضلاع المتناظرة متناسبة)

$$\frac{8}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{EB} \text{ اذن : } EB = 2\sqrt{3}$$

ومنه مساحة المستطيل $ABEF$ هي : $AB \times BE = 8 \times 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}cm^2$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.

c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

le : 17/12/2016

