

ملخص وقواعد في الرياضيات لمستوى الجذع مشترك آداب
من انجاز : الأستاذ نجيب عثمانى أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تاهيلي

ملخص درس الدوال

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 4 \neq 0\} \text{ يعني } g(x) = \frac{x^3}{2x-4} \quad (2)$$

$$2x - 4 = 0 \text{ يعني } 2x = 4 \text{ يعني } x = 2$$

$$\text{ومنه } D_g = \mathbb{R} - \{2\}$$

III. التمثيل المبياني لدالة عددية:

تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على جزء D من $\mathbb{R}$.

التمثيل المبياني C_f للدالة f (أو منحنى الدالة f) هو مجموعة النقط

$$M(x, y) \text{ من المستوى بحيث: } y = f(x) \text{ و } x \in D$$

IV. الدالة الزوجية- الدالة الفردية:

1. الدالة الزوجية:

تعريف: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها.

نقول إن f دالة زوجية إذا تحقق الشرطان التاليان:

$$\diamond \text{ لكل } x \text{ من } D_f \text{ لدينا: } -x \text{ تنتمي إلى } D_f.$$

$$\diamond \text{ لكل } x \text{ من } D_f \text{ لدينا: } f(-x) = f(x)$$

2. الدالة الفردية:

تعريف: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها

نقول أن f دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان:

$$\diamond \text{ لكل } x \text{ من } D_f \text{ لدينا: } -x \text{ تنتمي إلى } D_f.$$

$$\diamond \text{ لكل } x \text{ من } D_f \text{ لدينا: } f(-x) = -f(x)$$

مثال: نعتبر الدالة العددية f المعرفة كالتالي: $f(x) = \frac{2}{x}$

(1) حدد مجموعة تعريف الدالة f

(2) بين أن f دالة فردية (3) أرسم التمثيل المبياني للدالة f

(4) أعط تأويلا مبيانيا

$$\text{أجوبة: (1) } D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$$

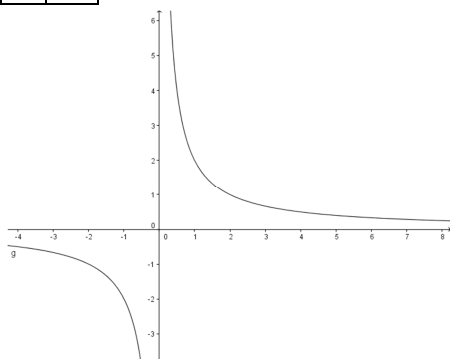
$$\text{ومنه: } D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$$

(2) أ) لكل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}^*$.

$$\text{ب) } f(-x) = \frac{2}{(-x)} = -\frac{2}{x} = -f(x)$$

ومنه f دالة فردية (3)

x	0	1	2	3
$f(x)$		2	1	$\frac{2}{3}$



(4) نقطة 0 مركز تماثل المنحنى C_f .

I. مفهوم دالة عددية

تعريف: ليكن D جزءا من $\mathbb{R}$.

نسمي f دالة عددية معرفة على D (أو f دالة من D نحو $\mathbb{R}$)، كل علاقة تربط كل عنصر x من D بعنصر وحيد من $\mathbb{R}$ ، يرمز له بالرمز $f(x)$.

مثال 1: ليكن f الدالة العددية المعرفة كالتالي: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x) = 3x^2 - 1$$

$$1. \text{ أحسب: } f(1) \text{ و } f(-1) \text{ و } f(\sqrt{2})$$

2. حدد سوابق العدد 2

$$\text{الجواب: (1) } f(1) = 3 \times 1^2 - 1 = 3 - 1 = 2 \text{ و } f(-1) = 3 \times (-1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$f(\sqrt{2}) = 3 \times (\sqrt{2})^2 - 1 = 6 - 1 = 5$$

$$3 \times x^2 = 3 \text{ يعني } 3 \times x^2 - 1 = 2 \text{ يعني } f(x) = 3 \times x^2 - 1 = 2$$

$$1 \text{ يعني } x^2 = 1 \text{ يعني } x = 1 \text{ أو } x = -1 \text{ ومنه للعدد سوابقين هما } x = 1 \text{ أو } x = -1$$

II. مجموعة تعريف دوال عددية:

تعريف: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x .

مجموعة تعريف الدالة f هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد

الحقيقية x بحيث $f(x)$ موجود أي $f(x)$ قابلة للحساب. و يرمز لها

غالبا بالرمز D_f بمعنى: $x \in D_f$ تكافئ $f(x) \in \mathbb{R}$.

ملحوظة: نقول إن f دالة عددية معرفة على A إذا كان A

جزءا من D_f .

اصطلاحات: لتكن f دالة عددية معرفة على D نكتب:

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x)$$

■ المجموعة D تسمى مجموعة تعريف الدالة f .

■ ليكن x عنصرا من D ، بحيث: $y = f(x)$

← y يسمى صورة x بالدالة f .

← العنصر x يسمى سابق العنصر y .

■ الدالة f تسمى كذلك دالة عددية لمتغير حقيقي.

ملاحظة: (1) إذا كانت f دالة حدودية فإن $D_f = \mathbb{R}$

(2) إذا كانت f دالة معرفة على الشكل: $f(x) = \sqrt{P(x)}$

$$\text{فإن } D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$$

(3) إذا كانت f دالة معرفة على الشكل: $f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$

$$\text{فإن } D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) > 0\}$$

مثال: حدد مجموعة تعريف الدوال التالية:

$$(1) f(x) = 3x^2 - x + 1 \quad (2) g(x) = \frac{x^3}{2x-4}$$

الجواب: (1) $f(x) = 3x^2 - x + 1$

يعني $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

التمثيل المبياني للدالة f : بما أن f دالة فردية فإنه يكفي أن نمثل f على $[0, +\infty[$ ثم نتمم منحنى الدالة f على باستعمال التماثل المركزي

الذي مركزه O أصل المعلم.

تعريف: منحنى الدالة $x \mapsto \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) يسمى هذلولاً مركزه

O أصل المعلم و مستقيماه المقاريبان هما $x=0$ و $y=0$.

5. التمثيل المبياني و تغيرات الدالة: $x \mapsto ax^2 + bx + c$

مثال: لتكن f دالة معرفة بـ: $f(x) = x^2 + 4x + 3$.

(1) بين أن: $f(x) = (x+2)^2 - 1$

(2) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محوري المعلم

(3) املا الجدول التالي

-5	-4	-3	-2	-1	0	1

(4) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f و المستقيم (D)

(5) حدد نقط تقاطع (C_f) و (D)

أجوبة: $f(x) = x^2 + 4x + 3$

$D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(1) $f(x) = x^2 + 4x + 3 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 - 2^2 + 3 = (x+2)^2 - 1$

(2) أ) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

(ب) نحل فقط المعادلة: $f(x) = 0$ يعني $(x+2)^2 - 1 = 0$

يعني $(x+2)^2 = 1$ يعني $x+2 = 1$ أو $x+2 = -1$

يعني $x = -1$ أو $x = -3$

ومنه نقط التقاطع هما: $A(-3; 0)$ و $B(-1; 0)$

ملاحظة: يمكن حل المعادلة باستعمال المميز

(ب) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتيب

نحسب فقط: $f(0)$

$f(0) = 3$

ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0; 3)$

(4) رسم: C_f

-5	-4	-3	-2	-1	0	1
8	3	0	-1	0	3	8

أ) التأويل المبياني

لتكن f دالة عددية لمتغير x حقيقي و C_f منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

❖ تكون f دالة زوجية إذا و فقط إذا كان محور الأرتيب محور تماثل المنحنى C_f .

❖ تكون f دالة فردية إذا و فقط إذا كانت النقطة O مركز تماثل المنحنى C_f .

V. تغيرات دالة عددية:

1. تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على المجال I .
❖ نقول إن الدالة f تزايدية (تناقصية) على المجال I , إذا و فقط إذا كان لكل

إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$)

❖ نقول إن الدالة f ثابتة على المجال I , إذا و فقط إذا كان

لكل x_1 و x_2 من I لدينا: $f(x_1) = f(x_2)$

اعط مثال لدالة ثابتة

2. جدول تغيرات دالة: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f

مجموعة تعريفها. دراسة منحنى تغيرات الدالة f , يعني تجزيء المجموعة D_f إلى أكبر مجالات ممكنة تكون فيها الدالة f تزايدية أو تناقصية قطعاً أو ثابتة. و نلخص نتائج هذه الدراسة في جدول يسمى جدول تغيرات الدالة ثابتة.

3. رتابة دالة على مجال:

تعريف: لتكن دالة عددية معرفة على مجال I .

نقول إن f رتبية قطعاً على المجال I إذا كانت تزايدية قطعاً على I

أو تناقصية قطعاً على I .

VI. دراسة بعض الدوال الاعتيادية

1. الدالة: $x \mapsto ax + b$ ($a \neq 0$)

التمثيل المبياني للدالة f هو مستقيم

2. الدالة: $x \mapsto ax^2$ ($a \neq 0$)

ملخص:

الحالة: $a < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

الحالة: $a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

ملاحظات: المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto ax^2$ ($a \neq 0$) يسمى شلجماً.

النقطة أصل المعلم تسمى رأس الشلجم. محور الأرتيب هو محور تماثل للمنحنى.

4. الدالة: $f(x) = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$)

ملخص:

الحالة: $a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

الحالة: $a < 0$

