

الأستاذ:
نجيب
عثماني

مستوى الجدة مشترك أدبي
تمارين بحلول: المعادلات و المتراجحات
والنظمت

أكاديمية
الجهة
الشرقية

$$\frac{4x+4-3}{6} = \frac{15x-6+2}{6} \text{ يعني}$$

$$4x+1=15x-4 \text{ يعني } \frac{4x+1}{6} = \frac{15x-4}{6} \text{ يعني}$$

$$S = \left\{ \frac{5}{11} \right\} \text{ ومنه: } x = \frac{5}{11} \text{ يعني } -11x = -5 \text{ يعني}$$

$$(7) x(x^2-1)=0 \text{ يعني } x^3-x=0 \text{ (التعميل)}$$

$$x^2=1 \text{ أو } x=0 \text{ يعني } x^2-1=0 \text{ يعني}$$

$$S = \{-1, 0, 1\} \text{ ومنه: } x = -\sqrt{1} \text{ أو } x = \sqrt{1} \text{ أو } x = 0 \text{ يعني}$$

تمرين 2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$\frac{x+1}{2} + 4 = \frac{2x-5}{10} + \frac{2(x+10)}{5} \quad (1)$$

$$x^3 - 4x = 0 \quad (2)$$

$$(5x-7)(3x-10) = 0 \quad (3)$$

$$\text{الجواب: (1)} \quad \frac{x+1}{2} + 4 = \frac{2x-5}{10} + \frac{2(x+10)}{5} \text{ (نوح المقاتم)}$$

$$\frac{5x+5}{10} + \frac{40}{10} = \frac{2x-5}{10} + \frac{4x+40}{10} \text{ يعني}$$

$$\frac{5x+5+40}{10} = \frac{2x-5+4x+40}{10} \text{ يعني}$$

$$-x = -10 \text{ يعني } 5x+5+40 = 2x-5+4x+40 \text{ يعني}$$

$$S = \{10\} \text{ ومنه: } x = 10 \text{ يعني}$$

$$(2) x^3 - 4x = 0 \text{ يعني } x(x^2 - 4) = 0 \text{ (التعميل)}$$

$$x^2 = 4 \text{ أو } x = 0 \text{ يعني } x^2 - 4 = 0 \text{ يعني}$$

$$S = \{-2, 0, 2\} \text{ ومنه: } x = -\sqrt{4} \text{ أو } x = \sqrt{4} \text{ أو } x = 0 \text{ يعني}$$

$$(3) 5x-7=0 \text{ يعني } 5x-7=0 \text{ أو } 3x-10=0 \text{ يعني}$$

$$\text{يعني } x = \frac{7}{5} \text{ أو } x = \frac{10}{3} \text{ ومنه: } S = \left\{ \frac{7}{5}, \frac{10}{3} \right\}$$

تمرين 3: هل العدد -1 حل للمعادلة $3x^2 + 5x + 2 = 0$ ؟

الجواب: نعم العدد -1 حل للمعادلة $3x^2 + 5x + 2 = 0$

$$\text{لأن: } 3(-1)^2 + 5(-1) + 2 = 0$$

تمرين 4: هل العدد $\sqrt{3}$ حل

$$\text{للمعادلة } x^2 + (1-\sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0 \text{ ؟}$$

الجواب: نعم العدد $\sqrt{3}$ حل

$$\text{للمعادلة } x^2 + (1-\sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$$

$$\text{لأن: } (\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3} - 3 - \sqrt{3} = 0$$

تمرين 5: أحسب مميز المعادلة $(E): 3x^2 - 5x + 7 = 0$

$$\text{لدينا: } a = 3 \text{ و } b = -5 \text{ و } c = 7 \text{ بما أن: } \Delta = b^2 - 4ac$$

تمرين 1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$(1) -2x + 22 = 0 \text{ يعني } 3(2x+5) = 6x-1$$

$$(3) 4(x-2) = 6x-2(x+4) \text{ يعني } 9x^2-16=0$$

$$(5) \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x+3)(9x-3) = 0$$

$$(6) \frac{2x+2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5x-2}{2} + \frac{1}{3}$$

$$(7) x^3 - x = 0$$

$$\text{الأجوبة: (1)} -2x + 22 = 0 \text{ يعني } -2x + 22 - 22 = -22$$

$$\text{يعني } -2x = -22$$

$$\text{يعني } -2x \times \left(\frac{1}{-2}\right) = -22 \times \left(\frac{1}{-2}\right)$$

$$\text{يعني } x = 11 \text{ ومنه: } S = \{11\} \text{ وتسمى مجموعة حلول المعادلة}$$

$$(2) 3(2x+5) = 6x-1 \text{ يعني } 6x+15 = 6x-1$$

$$\text{يعني } 6x-6x = -1-15 \text{ يعني } 0x = -16 \text{ يعني } 0 = -16$$

$$\text{وهذا غير ممكن ومنه: } S = \emptyset$$

$$(3) 4(x-2) = 6x-2(x+4) \text{ يعني } 4x-8 = 6x-2x-8$$

$$\text{يعني } 4x-4x+8-8 = 0 \text{ يعني } 0 = 0$$

$$\text{ومنه: كل عدد حقيقي هو حل لهذه المعادلة وبالتالي: } S = \mathbb{R}$$

$$(4) \text{ أمامنا معادلة من الدرجة الثانية}$$

$$\text{طريقة 1: (التعميل) } 9x^2-16=0 \text{ يعني } (3x)^2-4^2=0$$

$$\text{يعني } (3x-4)(3x+4) = 0 \text{ يعني } 3x-4=0 \text{ أو } 3x+4=0$$

$$\text{يعني } 3x = -4 \text{ أو } 3x = 4 \text{ يعني } x = -\frac{4}{3} \text{ أو } x = \frac{4}{3}$$

$$\text{ومنه: } S = \left\{ -\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right\}$$

$$\text{طريقة 2: } 9x^2-16=0 \text{ يعني } 9x^2=16 \text{ يعني } x^2 = \frac{16}{9}$$

$$\text{يعني } x = \sqrt{\frac{16}{9}} \text{ أو } x = -\sqrt{\frac{16}{9}} \text{ يعني } x = \frac{4}{3} \text{ أو } x = -\frac{4}{3}$$

$$(5) \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x+3)(9x-3) = 0$$

$$\text{يعني } x - \frac{1}{2} = 0 \text{ أو } 9x-3=0 \text{ أو } 2x+3=0$$

$$\text{يعني } x = \frac{1}{2} \text{ أو } x = \frac{1}{3} \text{ أو } x = -\frac{1}{3}$$

$$\text{منه: } S = \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right\}$$

$$(6) \frac{2x+2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5x-2}{2} + \frac{1}{3} \text{ (نوح المقاتم)}$$

$$\text{يعني } \frac{4x+4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{15x-6}{6} + \frac{2}{6}$$

الجواب : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 7 \times 3 = 25 - 84 = -59$

ملاحظة : الرمز Δ يقرأ: دلتا.

تمرين 6: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

(1) $3x^2 + x + 2 = 0$

(2) $x^2 - 10x + 25 = 0$

(3) $x^2 - 3x + 2 = 0$

الاجوبة (1): المعادلة $3x^2 + x + 2 = 0$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$

لأن $\Delta < 0$ ($\Delta = 1 - 4 \times 3 \times 2 = -23$) و بالتالي مجموعة حلولها

هي $S = \emptyset$.

(2) المعادلة $x^2 - 10x + 25 = 0$ لها حل وحيد مزدوج

لأن $\Delta = 0$ ($\Delta = 10^2 - 4 \times 25 = 0$).

حل هذه المعادلة هو: $x = \frac{-b}{2a} = 5$

و بالتالي مجموعة حلولها هي $S = \{5\}$.

(3) $x^2 - 3x + 2 = 0$

لدينا $\Delta = 9 - 4 \times 2 = 1$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$S = \{1; 2\}$ ومنه $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$ و $x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$

تمرين 7: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

(1) $6x^2 - 7x - 5 = 0$ ($\Delta > 0$) (2) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ ($\Delta = 0$)

(3) $3x^2 + x + 2 = 0$ ($\Delta < 0$) (4) $4x^2 - 8x + 3 = 0$

(5) $x^2 - 4x + 2 = 0$ (6) $x^2 + 5x + 7 = 0$

(7) $2x^2 - 4x + 6 = 0$ (8) $x^2 - 4x - 21 = 0$

(9) $3x^2 - 6x + 3 = 0$

الاجوبة: $6x^2 - 7x - 5 = 0$ $a = 6$ و $b = -7$ و $c = -5$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 6 \times (-5) = 49 + 120 = 169 = (13)^2 > 0$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-(-7) + \sqrt{169}}{2 \times 6} = \frac{7 + 13}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

ومنه: $x_2 = \frac{7 - 13}{12} = \frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$ $S = \left\{ \frac{5}{3}, -\frac{1}{2} \right\}$

(2) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ $a = 2$ و $b = -2\sqrt{2}$ و $c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \times 2 \times 1 = 8 - 8 = 0$

بما أن $\Delta = 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا هو:

ومنه: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2\sqrt{2})}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$

(3) $3x^2 + x + 2 = 0$ $a = 3$ و $b = 1$ و $c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1 - 24 = -23 < 0$

بما أن $\Delta < 0$ فان المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ ومنه: $S = \emptyset$

(4) $4x^2 - 8x + 3 = 0$ $a = 4$ و $b = -8$ و $c = 3$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 3 \times (4) = 64 - 48 = 16 = (4)^2 > 0$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_2 = \frac{-(-8) - \sqrt{16}}{2 \times 4}$ و $x_1 = \frac{-(-8) + \sqrt{16}}{2 \times 4}$

ومنه: $x_2 = \frac{8 - 4}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ و $x_1 = \frac{8 + 4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ $S = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\}$

(5) $x^2 - 4x + 2 = 0$ $a = 1$ و $b = -4$ و $c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (1) = 16 - 8 = 8 > 0$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{8}}{2 \times 1}$ و $x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{8}}{2 \times 1}$

$x_1 = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(2 + \sqrt{2})}{2} = 2 + \sqrt{2}$

ومنه: $x_2 = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(2 - \sqrt{2})}{2} = 2 - \sqrt{2}$ $S = \{2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}$

(6) $x^2 + 5x + 7 = 0$ $a = 1$ و $b = 5$ و $c = 7$

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 1 \times 7 = 25 - 28 = -3 < 0$

بما أن $\Delta < 0$ فان المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ ومنه: $S = \emptyset$

(7) $2x^2 - 4x + 6 = 0$ $a = 2$ و $b = -4$ و $c = 6$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 16 - 48 = -32 < 0$

بما أن $\Delta < 0$ فان المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ ومنه: $S = \emptyset$

(8) $x^2 - 4x - 21 = 0$ $a = 1$ و $b = -4$ و $c = -21$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-21) = 16 + 84 = 100 = (10)^2 > 0$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{100}}{2 \times 1}$ و $x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{100}}{2 \times 1}$

ومنه: $x_2 = \frac{4 - 10}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ و $x_1 = \frac{4 + 10}{2} = \frac{14}{2} = 7$ $S = \{-3, 7\}$

(9) $3x^2 - 6x + 3 = 0$ $a = 3$ و $b = -6$ و $c = 3$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 36 - 36 = 0$

بما أن $\Delta = 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا مزدوجا هو :

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \times 3} = \frac{6}{6} = 1$ ومنه: $S = \{1\}$

تمرين 8: عمل ثلاثيات الحدود التالية :

(1) $x^2 - 10x + 25$ (2) $x^2 - 3x + 2$ (3) $3x^2 + x + 2$

أجوبة (1): $x^2 - 10x + 25$: $a = 1$ و $b = -10$ و $c = 25$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 1 \times (25) = 100 - 100 = 0$

بما أن $\Delta = 0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد هو:

$x_1 = \frac{-(-10)}{2 \times 1} = \frac{10}{2} = 5$

ومنه التعميل : $x^2 - 10x + 25 = a(x - x_1)^2 = 1(x - 5)^2$

(2) $x^2 - 3x + 2$ $a = 1$ و $b = -3$ و $c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 = (1)^2 > 0$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$x_2 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2 \times 1}$ و $x_1 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2 \times 1}$ يعني $x_2 = 1$ و $x_1 = 2$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-3x+9$		+	-

و منه فان : $S = [3; +\infty[$

تمرين 14: حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المتراجحات التالية:

$$5x-15 \leq 0 \quad (2) \quad -2x+12 > 0 \quad (1)$$

أجوبة: (1) $-2x+12 > 0$ يكافئ $x = 6$ و بما أن: $a = -2$ و $a < 0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$-2x+12$		+	-

و منه فان : $S =]-\infty; 6[$

(2) $5x-15 \leq 0$ يكافئ $x = 3$ و بما أن: $a = 5$ و $a > 0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$5x-15=0$		-	+

و منه فان : $S =]-\infty; 3]$

تمرين 15: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

$$(1-x)(2x+4) > 0 \quad (2) \quad 4x^2-9 \geq 0 \quad (1)$$

أجوبة: (1) $4x^2-9 \geq 0$

$$(2x-3)(2x+3) = 0 \quad \text{يعني} \quad (2x)^2 - 3^2 = 0 \quad \text{يعني} \quad 4x^2 - 9 = 0$$

$$\text{يعني} \quad 2x+3=0 \quad \text{أو} \quad 2x-3=0 \quad \text{يعني} \quad x = \frac{-3}{2} \quad \text{أو} \quad x = \frac{3}{2}$$

الطريقة: في جدول نعطي إشارة كل عامل على الشكل $ax + b$ ثم استنتج إشارة

الجاء أو الخارج مع ترتيب تزايد للقيم التي ينعدم فيها كل عامل.

x	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
			$-\infty$
$2x+3$	-	0	+
$2x-3$	-	0	+
$(2x-3)(2x+3)$	+	0	+

و منه فان : $S =]-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}; +\infty[$

$$(1-x)(2x+4) > 0 \quad (2)$$

$$(1-x)(2x+4) = 0 \quad \text{يعني} \quad 2x+4=0 \quad \text{أو} \quad 1-x=0 \quad \text{يعني}$$

$$x = -2 \quad \text{أو} \quad x = 1$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$2x+4$	-	0	+	+
$1-x$	+	+	0	-
$(1-x)(2x+4)$	-	0	+	-

و منه فان : $S =]-2; 1[$

تمرين 16: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $9x^2 - 25 < 0$

$$\text{الجواب:} \quad 9x^2 - 25 = 0 \quad \text{يعني} \quad (3x)^2 - 5^2 = 0$$

$$(3x-5)(3x+5) = 0$$

$$\text{يعني} \quad 3x+5=0 \quad \text{أو} \quad 3x-5=0 \quad \text{يعني} \quad x = \frac{-5}{3} \quad \text{أو} \quad x = \frac{5}{3}$$

ومنه التعميل :

$$x^2 - 3x - 2 = a(x-x_1)(x-x_2) = 1(x-2)(x-1)$$

$$(3) \quad 3x^2 + x + 2 \quad \text{لدينا:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1 - 24 = -23 < 0$$

ومنه فان هذه الحدودية لا يمكن تعميلها

تمرين 9: عمل ثلاثيات الحدود التالية :

$$(1) \quad 2x^2 - 4x + 6 \quad (2) \quad 4x^2 - 8x + 3 \quad (3) \quad 3x^2 - 6x + 3$$

$$\text{أجوبة:} \quad (1) \quad 2x^2 - 4x + 6 = 0 \quad : \quad a = 2 \quad \text{و} \quad b = -4 \quad \text{و} \quad c = 6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (6) = 16 - 48 = -32 < 0$$

ومنه فان هذه الحدودية لا يمكن تعميلها

$$(2) \quad 4x^2 - 8x + 3 = 0 \quad : \quad a = 4 \quad \text{و} \quad b = -8 \quad \text{و} \quad c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 4 \times 3 = 64 - 48 = 16 = (4)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$$x_2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{8+4}{2 \times 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

ومنه التعميل :

$$4x^2 - 8x + 3 = 4 \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{3}{2} \right) = (4x-2) \left(x - \frac{3}{2} \right)$$

$$(3) \quad 3x^2 - 6x + 3 \quad \text{بما أن} \quad \Delta = 0 \quad \text{فان هذه الحدودية لها جذر وحيد}$$

$$\text{هو:} \quad x_1 = \frac{-(-6)}{2 \times 3} = 1$$

$$\text{ومنه التعميل:} \quad 3x^2 - 6x + 3 = a(x-x_1)^2 = 3(x-1)^2$$

تمرين 10: حدد إشارة $2x + 1$

$$\text{الجواب:} \quad 2x + 1 = 0 \quad \text{يكافئ} \quad x = -\frac{1}{2}$$

و بما أن $a = 2$ و $a > 0$ فان جدول إشارة $2x + 1$ هو كالتالي:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	-	0	+

تمرين 11: حدد إشارة $-x + 2$

الجواب:

$$-x + 2 = 0 \quad \text{يكافئ} \quad x = 2$$

و بما أن: $a = -1$ و $a < 0$ فان جدول إشارة $-x + 2$ هو كالتالي:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x+2$	-	0	+

تمرين 12: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية : $3x + 6 \geq 0$

$$\text{الجواب:} \quad 3x + 6 = 0 \quad \text{يكافئ} \quad x = -2$$

و بما أن: $a = 3 > 0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$3x+6$	-	0	+

و منه فان : $S = [-2; +\infty[$

تمرين 13: حدد إشارة: $-3x + 9$

$$\text{وحل في } \mathbb{R} \text{ المتراجحة:} \quad -3x + 9 < 0$$

$$\text{الجواب:} \quad -3x + 9 = 0 \quad \text{يكافئ} \quad x = 3$$

و بما أن: $a = -3 < 0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$3x+6$	-	0	+

أجوبة (1): $a = 3 > 0$ $2x^2 - 4x + 6 \geq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 48 = -32 < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x) = 3x^2 - 4x + 6$		+

ومنه: $S = \mathbb{R}$

$a = 4$ $4x^2 - 8x + 3 \leq 0$ (2)

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 4 \times 3 = 64 - 48 = 16 > 0$

بما أن $\Delta > 0$ فان للحدودية جذرين هما:

ومنه: $x_2 = \frac{8-4}{8} = \frac{1}{2}$ و $x_1 = \frac{8+4}{2 \times 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$4x^2-8x+3$	$+$	0	$-$	0	$+$

$S = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$

$a = 4$ $x^2 - 3x - 10 < 0$ (3)

$\Delta = b^2 - 4ac = 49 > 0$

بما أن $\Delta > 0$ فان للحدودية جذرين هما:

ومنه: $x_2 = -2$ و $x_1 = 5$

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$	
$x^2-3x-10$	$+$	0	$-$	0	$+$

$S =]-2, 5[$

تمرين 21: $\mathbb{R}^2$ هي مجموعة الأزواج (x, y) حيث $x \in \mathbb{R}$

و $y \in \mathbb{R}$

نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}^2$ المعادلة: $2x + 3y = 2$

(1) تأكد أن الزوج $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ حل للمعادلة: $2x + 3y = 2$

(2) اعط ثلاث أزواج حلول للمعادلة: $2x + 3y = 2$

(3) حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلة: $2x + 3y = 2$

أجوبة (1): $2 \times 0 + 3 \times \frac{2}{3} = 2$ إذن: $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ حل للمعادلة

(2) $x = 2$ إذن: $2 \times 2 + 3 \times y = 2$ يعني: $y = -\frac{2}{3}$ إذن: $\left(2, -\frac{2}{3}\right) \in S$

$x = 3$ إذن: $2 \times 3 + 3 \times y = 2$ يعني: $y = -\frac{4}{3}$ إذن: $\left(3, -\frac{4}{3}\right) \in S$

$x = 4$ إذن: $2 \times 4 + 3 \times y = 2$ يعني: $y = -2$ إذن: $(4, -2) \in S$

(3) $2x + 3y = 2$ يعني $3y = -2x + 2$ يعني $y = \frac{-2x+2}{3}$

يعني $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ إذن: $S = \left\{ \left(x; -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \right) / x \in \mathbb{R} \right\}$

تمرين 22: حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلات التالية:

(1) $2x - 8y + 10 = 0$ (2) $-3x + 12y - 2 = 0$

(3) $7x - 14y + 1 = 0$

أجوبة (1): $2x - 8y + 10 = 0$ يعني $2y = 8x - 10$ يعني $y = \frac{8x-10}{2}$

يعني $y = 4x - 5$ إذن: $S = \{(x; 4x - 5) / x \in \mathbb{R}\}$

الطريقة: في جدول نعطي إشارة كل عامل على الشكل $ax + b$ ثم استنتج إشارة

الجداء أو الخارج مع ترتيب تزايد للقيم التي يندمج فيها كل عامل.

x	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$3x+5$	$-$	0	$+$	$+$
$3x-5$	$-$		$-$	0
$(2x-3)(2x+3)$	$+$	0	$-$	0

و منه فان: $S = \left] -\infty; -\frac{5}{3} \right] \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty \right[$

تمرين 17:

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$

2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$

أجوبة (1): $a = 2$ $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$

بما أن $\Delta > 0$ فان للحدودية جذرين هما:

ومنه: $x_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$ و $x_2 = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{3+1}{4} = 1$

X	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

(2) حل المتراجحة: $S = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right] \cup [1, +\infty[$

تمرين 18:

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x) = -2x^2 + 4x - 2$

2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $-2x^2 + 4x - 2 > 0$

أجوبة (1): $a = -2$ $P(x) = -2x^2 + 4x - 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 16 - 16 = 0$

بما أن $\Delta = 0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد هو: $x_1 = \frac{-(-4)}{2 \times (-2)} = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$P(x) = -2x^2 + 4x - 2$	$-$	0	$-$

(2) حل المتراجحة: $S = \mathbb{R}$

تمرين 19:

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x) = 3x^2 + 6x + 5$

2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $3x^2 + 6x + 5 < 0$

أجوبة (1): $a = 3 > 0$ $P(x) = 3x^2 + 6x + 5$

ومنه: $\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 36 - 60 = -24 < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x) = 3x^2 + 6x + 5$		+

(2) حل المتراجحة: $S = \emptyset$

تمرين 20: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

(1) $2x^2 - 4x + 6 \geq 0$ (2) $4x^2 - 8x + 3 \leq 0$ (3)

$x^2 - 3x - 10 < 0$

$$y = 2x + 1 \text{ يعني } 2x - y = -1$$

ونعوض y بقيمتها في المعادلة الثانية

$$3x + 2(2x + 1) = 9 \text{ يعني } -5x + 2y = -19$$

$$x = 1 \text{ يعني } 7x = 7 \text{ يعني } 7x + 2 = 9$$

ونعوض x ب 1 في المعادلة $y = 2x + 1$ فنجد $y = 3$

$$S = \{(1, 3)\}$$

$$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ -2x + 3y = 5 \end{cases} \quad (2)$$

نضرب المعادلة الأولى في العدد (2) فنحصل على :

$$\begin{cases} 2x - 4y = -8 \\ -2x + 3y = 5 \end{cases} \text{ وجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:}$$

$$y = 3 \text{ يعني } -y = -3 \text{ يعني } 2x - 4y - 2x + 3y = -8 + 5$$

ونعوض y ب 3 في المعادلة $x - 2y = -4$ فنجد $x = 2$

$$S = \{(2, 3)\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -35 + 12 = -23 \neq 0 \text{ هي: (1) محددة النظمة}$$

و منه النظمة تقبل حلا وحيدا:

$$S = \left\{ \left(-\frac{14}{23}, -\frac{2}{23} \right) \right\} \text{ هو: } x = \frac{\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2}{23} \text{ و } y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{14}{23}$$

تمرين 27: باستعمال طريقة مناسبة

حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظمات التالية :

$$\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -x + \frac{4}{3}y = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ x^2 - y^2 = 44 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} (\sqrt{5} - \sqrt{3})x + (\sqrt{2} - 1)y = 0 \\ (\sqrt{2} + 1)x + (\sqrt{5} + \sqrt{3})y = 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ أجوبة: (1) محددة النظمة هي:}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2(x - 2y) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x - 2y = 1 \Leftrightarrow -2y = 1 - x \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$$

و منه النظمة (S) لها عدد لا منته من الحلول لان :

$$S = \left\{ \left(x; \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) / x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{بضرب المعادلة الثانية في } -3 \begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -x + \frac{4}{3}y = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases} \quad (2)$$

وهذا غير ممكن ومنه $S = \emptyset$

$$\begin{cases} (\sqrt{5} - \sqrt{3})x + (\sqrt{2} - 1)y = 0 \\ (\sqrt{2} + 1)x + (\sqrt{5} + \sqrt{3})y = 1 \end{cases} \quad (3)$$

محددة النظمة هي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{5} - \sqrt{3} & \sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{2} + 1 & \sqrt{5} + \sqrt{3} \end{vmatrix} = (\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) - (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$$

$$y = \frac{3x+2}{12} \text{ يعني } 12y = 3x+2 \text{ يعني } -3x+12y-2=0 \quad (2)$$

$$S = \left\{ \left(x; \frac{1}{4}x + \frac{1}{6} \right) / x \in \mathbb{R} \right\} \text{ ان: } y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{6} \text{ يعني}$$

$$x = \frac{14y-1}{7} \text{ يعني } 7x = 14y-1 \text{ يعني } 7x-14y+1=0 \quad (3)$$

$$S = \left\{ \left(2y - \frac{1}{7}; y \right) / y \in \mathbb{R} \right\} \text{ ان: } x = 2y - \frac{1}{7} \text{ يعني}$$

$$\begin{cases} 4x + y = 10 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases} \text{ حل في } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ النظمة التالية:}$$

باستعمال طريقة التعويض

الجواب: نبحث عن y في المعادلة الأولى مثلا

$$y = 10 - 4x \text{ يعني } 4x + y = 10$$

ونعوض y بقيمتها في المعادلة الثانية

$$-5x + 2(10 - 4x) = -19 \text{ يعني } -5x + 2y = -19$$

$$x = 3 \text{ يعني } -13x = -39 \text{ يعني } -5x - 8x = -19 - 20$$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $y = 10 - 4x$ فنجد $y = -2$

$$S = \{(3, -2)\}$$

$$\begin{cases} 4x + y = 10 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases} \text{ حل في } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ النظمة التالية:}$$

باستعمال طريقة التآلفة الخطية

الجواب: نضرب المعادلة الأولى في العدد (-2) فنحصل

على :

$$\begin{cases} -8x - 2y = -20 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases} \text{ وجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:}$$

$$x = 3 \text{ يعني } -13x = -39 \text{ يعني } -8x - 2y - 5x + 2y = -20 - 19$$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $4x + y = 10$ فنجد $y = -2$

$$S = \{(3, -2)\}$$

تمرين 25: حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظمة التالية :

$$(1) \begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x + 4y = 2 \end{cases}$$

باستعمال طريقة المحددة

الجواب: طريقة المحددة:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \text{ هي: (1) محددة النظمة تقبل حلا}$$

وحيدا:

$$S = \{(2, 1)\} \text{ هو: } x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2 \text{ و } y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1$$

تمرين 26: حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظمات التالية :

$$(1) \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x - 2y = -4 \\ -2x + 3y = 5 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} -7x - 3y = 4 \\ 4x + 5y = -2 \end{cases}$$

أجوبة :

$$(1) \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases} \text{ نبحت عن } y \text{ في المعادلة الأولى مثلا}$$

تمرين 29: حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظام التالية :

$$\begin{cases} \frac{5}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 4 \\ \frac{-2}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 1 \end{cases}$$

أجوبة: نضع: $Y = \frac{1}{y-2}$ و $X = \frac{1}{x-1}$

$$y \neq 1 \quad x \neq 1$$

$$\begin{cases} 5X + 3Y = 4 \\ -2X + Y = 1 \end{cases}$$

ونقوم بحل هذه النظام ونجد : $Y = \frac{13}{11}$ و $X = \frac{1}{11}$

$$\text{و منه : } \frac{1}{y-2} = \frac{13}{11} \text{ و } \frac{1}{x-1} = \frac{1}{11}$$

$$\text{يعني : } y-2 = \frac{11}{13} \text{ و } x-1 = 11 \text{ يعني : } y = \frac{37}{13} \text{ و } x = 12$$

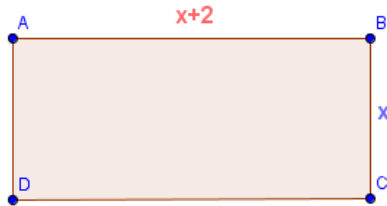
$$\text{و بالتالي : } S = \left\{ \left(12, \frac{37}{13} \right) \right\}$$

تمرين 30: أحسب طول عرض مستطيل اذا علمت أن طوله يزيد

عن عرضه ب 2cm

وأن مساحته تساوي 15cm^2

الجواب



ليكن X وعرض مستطيل اذن طوله هو : $x + 2$ ومنه مساحته هي :

$$S = x(x + 2) = 15$$

ومنه نحصل عن معادلة من الدرجة الثانية :

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \quad : \quad a = 1 \quad \text{و} \quad c = -15 \quad \text{و} \quad b = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 64 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما :

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-2 - 8}{2 \times 1} = -5 < 0 \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-2 + 8}{2 \times 1} = 3$$

ومنه: بما أن عرض مستطيل لا يمكن أن يكون سالبا :

$$\text{نأخذ } x = 3$$

وبالتالي طوله هو : 5cm

$$\Delta = (5-3) - (2-1) = 1 \neq 0 \quad \text{اذن} \quad \Delta = ((\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2) - ((\sqrt{2})^2 - (1)^2)$$

و منه النظام تقبل حلا وحيدا :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2}-1 \\ 1 & \sqrt{5}+\sqrt{3} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-(\sqrt{2}-1)}{1} = -\sqrt{2}+1 = 1-\sqrt{2} \text{ هو}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{5}-\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2}+1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{1} = -\sqrt{5}+\sqrt{3} = \sqrt{3}-\sqrt{5} \text{ و}$$

$$\text{و منه : } S = \{(1-\sqrt{2}, \sqrt{3}-\sqrt{5})\}$$

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ (x + y)(x - y) = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 11 \\ x^2 - y^2 = 44 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 11 \\ 11(x - y) = 44 \end{cases} \Leftrightarrow$$

وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد :

$$x = \frac{15}{2} \text{ يعني } 2x = 15 \text{ يعني } x + y + x - y = 11 + 4$$

ونعوض x ب $\frac{15}{2}$ في المعادلة $x + y = 11$ فنجد

$$S = \left\{ \left(\frac{15}{2}, \frac{7}{2} \right) \right\} \text{ و منه : } y = \frac{7}{2} \text{ أي } \frac{15}{2} + y = 11$$

تمرين 28: (1) حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظام التالية :

$$\begin{cases} -7x - 3y = 4 \\ 4x + 5y = -2 \end{cases}$$

$$(2) \text{ استنتج حلول النظام التالية : } \begin{cases} \frac{-7}{x} - \frac{3}{y} = 4 \\ \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = -2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -35 + 12 = -23 \neq 0 \text{ هي : (1) محددة النظام (1) هي :}$$

و منه النظام تقبل حلا وحيدا :

$$S = \left\{ \left(\frac{14}{23}, -\frac{2}{23} \right) \right\} \text{ و منه : } y = \frac{\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2}{23} \text{ و } x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{14}{23} \text{ هو}$$

(2) لكي تكون للنظام معنى يجب أن يكون لدينا : $x \neq 0$ و $y \neq 0$

$$Y = \frac{1}{y} \text{ و } X = \frac{1}{x} \text{ نضع : } \Leftrightarrow \begin{cases} -7 \frac{1}{x} - 3 \frac{1}{y} = 4 \\ 4 \frac{1}{x} + 5 \frac{1}{y} = -2 \end{cases} \begin{cases} \frac{-7}{x} - \frac{3}{y} = 4 \\ \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7X - 3Y = 4 \\ 4X + 5Y = -2 \end{cases} \text{ فنحصل على النظام التالية : } \begin{cases} -7X - 3Y = 4 \\ 4X + 5Y = -2 \end{cases} \text{ و } x \neq 0 \text{ و } y \neq 0$$

$$\text{وسبق أن قمنا بحل هذه النظام : } Y = -\frac{2}{23} \text{ و } X = -\frac{14}{23}$$

$$\text{و منه : } \frac{1}{y} = -\frac{2}{23} \text{ و } \frac{1}{x} = -\frac{14}{23} \text{ يعني : } y = -\frac{23}{2} \text{ و } x = -\frac{23}{14}$$

$$\text{و بالتالي : } S = \left\{ \left(-\frac{23}{14}, -\frac{23}{2} \right) \right\}$$

تمارين للبحث

تمرين 1 : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$\begin{aligned} (1) \quad & 2x^2 - 4x + 6 = 0 \\ (2) \quad & 4x^2 - 8x + 3 = 0 \\ (3) \quad & 3x^2 - 6x + 3 = 0 \\ (4) \quad & 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \\ (5) \quad & x^2 - 4x + 2 = 0 \\ (6) \quad & x^2 + 5x + 7 = 0 \end{aligned}$$

تمرين 2 : (1) حل جبريا النظام التالية :

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 5x + 3y = 50 \end{cases}$$

(2) ملأ شخص أربع عشرة قنينة بخمس لترات من عصير فواكه . إذا علمت أن القنينات نوعان : قنينات سعة كل واحدة منها 0,5 لترا و قنينات سعة كل واحدة منها 0,3 لترا، حدد عدد القنينات من كل نوع .

تمرين 3 :

(1) حل المعادلة : $(2x - 3)(4 - 3x) = 0$.

(2) حل المتراجحة : $5x - 2 < 2(x + 5)$.

(3) اشترى شخص محسبة و كتابا بثمن 153 درهما . إذا علمت أن نصف ثمن المحسبة ينقص بثمانية عشر درهما عن ثلثي ثمن الكتاب، أحسب ثمن المحسبة .

تمرين 4 :

(1) حل النظام :

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 2x + 5y = 61 \end{cases}$$

(2) يتوفر أحمد على 61 درهما موزعة على 20 قطعة نقدية بعضها من فئة درهمين ، والبعض الآخر من فئة خمسة دراهم . أحسب عدد القطع النقدية من كل فئة

تمرين 5 :

(1) أ) حل المعادلة التالية : $\frac{2x}{3} - \frac{5}{6} = x - \frac{3}{2}$.

ب) حل المتراجحة التالية : $2 - 3x > x + 7$.

(2) أ) حل النظام :

$$\begin{cases} 3x + 5y = 72 \\ x + y = 20 \end{cases}$$

ب) واجب زيارة أحد المتاحف هو 3 دراهم للأطفال و 5 دراهم للكبار .

أدى فوج من 20 زائر مبلغ 72 درهما لزيارة هذا المتحف . حدد عدد الأطفال و عدد الكبار في هذا الفوج .

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} 2x - 5y = -13 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases} \\ (2) \quad & \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

