

ملخص وقواعد في الرياضيات لمستوى الجذع مشترك آداب
من انجاز : الأستاذ نجيب عثمانى أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تاهيلي

ملخص درس المعادلات والمتراجحات والنظمت

الجواب (1): $4x^2 - 9 = 0$ يعني $(2x)^2 - 3^2 = 0$ يعني

$$(2x-3)(2x+3) = 0$$

يعني $2x+3=0$ أو $2x-3=0$ يعني $x = \frac{3}{2}$ أو $x = -\frac{3}{2}$

الطريقة: في جدول نعطي إشارة كل عامل على الشكل $ax + b$ ثم استنتج إشارة الجداء أو الخارج مع ترتيب تزايد للقيم التي ينعدم فيها كل عامل.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x+3$	-	0	+	+
$2x-3$	-	-	0	+
$(2x-3)(2x+3)$	+	0	-	+

و منه فان : $S =]-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}; +\infty[$

$$(1-x)(2x+4) > 0 \quad (2)$$

$$1-x=0 \text{ أو } 2x+4=0 \text{ يعني } (1-x)(2x+4)=0$$

يعني $x=1$ أو $x=-2$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$2x+4$	-	0	+	+
$1-x$	+	+	0	-
$(1-x)(2x+4)$	-	0	+	-

و منه فان : $S =]-2; 1[$

III. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

لحل المعادلة : $ax^2 + bx + c = 0$ نحسب مميز المعادلة

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$$

✓ إذا كان $\Delta < 0$ فان المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$.

✓ إذا كان $\Delta = 0$ فان المعادلة تقبل حلا وحيدا هو : $-\frac{b}{2a}$

✓ إذا كان $\Delta > 0$ فان المعادلة تقبل حلين هما : $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

نرمز لمجموعة حلول المعادلة بالرمز S .

مثال 1: المعادلة $3x^2 + x + 2 = 0$ ليس لها حلا في $\mathbb{R}$ لأن $\Delta = 1 - 4 \times 3 \times 2 = -23$ و بالتالي مجموعة حلولها هي $S = \emptyset$.

مثال 2: المعادلة $x^2 - 10x + 25 = 0$ لها حل وحيد لأن $\Delta = 10^2 - 4 \times 25 = 0$ حل هذه المعادلة هو :

$$-\frac{b}{2a} = 5 \text{ و بالتالي مجموعة حلولها هي } S = \{5\}$$

مثال 3: نعتبر المعادلة $x^2 - 3x + 2 = 0$ لدينا $\Delta = 9 - 4 \times 2 = 1$ بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما :

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \text{ و } x_2 = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ و منه } S = \{1; 2\}$$

I. المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين. كل معادلة على الشكل $ax + b = 0$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد، حيث x هو المجهول.

أمثلة : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$(1) \quad -2x + 22 = 0 \quad (2) \quad 3(2x+5) = 6x-1$$

$$(3) \quad 4(x-2) = 6x-2(x+4) \quad (4) \quad 9x^2-16=0$$

الجواب (1): $-2x + 22 = 0$ يعني $-2x = -22$

يعني $x = 11$ ومنه : $S = \{11\}$ وتسمى مجموعة حلول المعادلة

$$(2) \quad 3(2x+5) = 6x-1 \text{ يعني } 6x+15=6x-1$$

$$\text{يعني } 6x-6x = -1-15 \text{ يعني } 0x = -16 \text{ يعني } 0 = -16$$

وهذا غير ممكن ومنه : $S = \emptyset$

$$(3) \quad 4(x-2) = 6x-2(x+4) \text{ يعني } 4x-8=6x-2x-8$$

$$\text{يعني } 4x-4x+8-8=0 \text{ يعني } 0=0$$

ومنه : كل عدد حقيقي هو حل لهذه المعادلة وبالتالي : $S = \mathbb{R}$

(4) أمامنا معادلة من الدرجة الثانية

$$(9x^2-16=0) \text{ يعني } (3x)^2-4^2=0$$

$$\text{يعني } (3x-4)(3x+4)=0 \text{ يعني } 3x-4=0 \text{ أو } 3x+4=0$$

$$\text{يعني } 3x=-4 \text{ أو } 3x=4 \text{ يعني } x = -\frac{4}{3} \text{ أو } x = \frac{4}{3}$$

ومنه : $S = \left\{-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right\}$

II. المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين كل متراجحة على الشكل

$$ax + b \geq 0 \text{ أو } ax + b > 0 \text{ أو } ax + b \leq 0 \text{ أو } ax + b < 0$$

تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد حيث x هو المجهول.

إشارة الحدانية $ax + b$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	إشارة a	0	عكس إشارة a

مثال 1: حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المتراجحات التالية:

$$(1) \quad -2x + 12 > 0 \quad (2) \quad 5x - 15 \leq 0$$

$$\text{أجوبة (1): } -2x + 12 > 0 \text{ يعني } -2x > -12 \text{ يعني } x < 6$$

و بما أن : $a = -2$ و $a < 0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$-2x+12$	-	0	+

و منه فان : $S =]-\infty; 6[$

$$(2) \quad 5x - 15 \leq 0 \text{ يعني } 5x \leq 15 \text{ يعني } x \leq 3$$

و بما أن : $a = 5$ و $a > 0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$5x-15=0$	-	0	+

و منه فان : $S =]-\infty; 6[$

مثال 2: حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المتراجحات التالية:

$$(1) \quad 4x^2 - 9 \geq 0 \quad (2) \quad (1-x)(2x+4) > 0$$

$$4x + y = 10 \text{ يعني } y = 10 - 4x$$

ونعوض y بقيمتها في المعادلة الثانية

$$-5x + 2(10 - 4x) = -19 \text{ يعني } -5x + 2y = -19$$

يعني $4x + y = 10$ يعني $-13x = -39$ يعني $x = 3$
ونعوض x بـ 3 في المعادلة $y = 10 - 4x$ فنجد $y = -2$

ومنه: $S = \{(3, -2)\}$

(2) طريقة التأليف الخطية

مثال: حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظام التالية :
 $\begin{cases} 4x + y = 10 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases}$

الجواب: نضرب المعادلة الأولى في العدد (-2) فنحصل

على : $\begin{cases} -8x - 2y = -20 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases}$ وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:

$$-13x = -39 \text{ يعني } x = 3$$

ونعوض x بـ 3 في المعادلة $4x + y = 10$ فنجد $y = -2$

ومنه: $S = \{(3, -2)\}$

(3) طريقة المحددة :

مثال: طريقة المحددة: حل في $\mathbb{R}^2$ النظام: (1)
 $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x + 4y = 2 \end{cases}$

الجواب: محددة النظام (1) هي: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ ومنه النظام

$$\text{تقبل حلا وحيدا: هو } x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2 \text{ و } y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1$$

منه: $S = \{(2, 1)\}$

IV. إشارة ثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$:

الحالة 1: إذا كان $\Delta > 0$ و x_1 و x_2 هما جذري ثلاثية الحدود فان:

x	x_1	x_2	$+\infty$
			$-\infty$
$P(x) = ax^2 + bx + c$	إشارة a	0	عكس إشارة a

الحالة 2: إذا كان $\Delta = 0$ و x_1 هو الجذر الوحيد المزدوج فان:

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$P(x) = ax^2 + bx + c$	إشارة a	0	إشارة a

الحالة 3: إذا كان $\Delta < 0$ فان إشارة $P(x)$ هي إشارة العدد a

فان:

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x) = ax^2 + bx + c$	إشارة a	

مثال 1: أدرس إشارة الحدودية $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$

وحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$

أجوبة (1): $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ $a = 2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$$\text{ومنه: } x_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \text{ و } x_2 = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{3+1}{4} = 1$$

χ	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$P(x)$	+	0	-	0	+

(2) حل المتراجحة : $S =]-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty[$

مثال 2: أدرس إشارة الحدودية $P(x) = -2x^2 + 4x - 2$

وحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $-2x^2 + 4x - 2 > 0$

أجوبة (1): $P(x) = -2x^2 + 4x - 2$ $a = -2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 16 - 16 = 0$$

بما أن $\Delta = 0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد هو: $x_1 = \frac{-(-4)}{2 \times (-2)} = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$P(x) = -2x^2 + 4x - 2$	-	0	-

(2) حل المتراجحة : $S = \mathbb{R}$

مثال 3: أدرس إشارة الحدودية $P(x) = 3x^2 + 6x + 5$

وحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $3x^2 + 6x + 5 < 0$

أجوبة (1): $P(x) = 3x^2 + 6x + 5$ $a = 3 > 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 36 - 60 = -24 < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x) = 3x^2 + 6x + 5$	+	

(2) حل المتراجحة : $S = \emptyset$

V. النظم:

(1) طريقة التعويض:

مثال: حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظام التالية :
 $\begin{cases} 4x + y = 10 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases}$

الجواب: نبحث عن y في المعادلة الأولى مثلا