

الأستاذ:
نجيب
عثماني

مستوى الجذع مشترك أدبي
الدرس الرابع :
الحساب العددي 4:
المعادلات والمتراجحات و النظمات

أكاديمية
الجهة
الشرقية

محتوى الدرس

المعادلات ، المتراجحات ، النظمات

- المعادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد
- المعادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد ، تعميل ثلاثية الحدود
- إشارة ، المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد
- متراجحات تؤول في حلها إلى متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد
- المعادلات من الدرجة الأولى بمجهولين
- نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين
- طرق الحل: التعويض ، التاليفة الخطية والمحددات

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

- حل معادلات من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية بمجهول واحد، ومعادلات تؤول في حلها إلى المعادلات السابقة.
- تعميل ثلاثية الحدود من الدرجة الثانية باستعمال مختلف التقنيات.
- حل متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد، ومتراجحات تؤول في حلها إلى المتراجحات السابقة.
- حل نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين.
- تربيض وضعيات تؤول في حلها إلى المعادلات أو المتراجحات أو النظمات السابقة .

I. المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين.

كل معادلة على الشكل $ax + b = 0$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد، حيث x هو المجهول.

أمثلة : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$(1) \quad 3(2x+5) = 6x-1 \quad (2) \quad -2x + 22 = 0$$

$$(3) \quad 9x^2 - 16 = 0 \quad (4) \quad 4(x-2) = 6x - 2(x+4)$$

$$(5) \quad (2x+3)(9x-3)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$(6) \quad \frac{2x+2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5x-2}{2} + \frac{1}{3}$$

$$(7) \quad x^3 - x = 0$$

$$(1) \quad -2x + 22 = 0 \quad \text{يعني} \quad -2x + 22 - 22 = -22$$

$$\text{يعني} \quad -2x = -22$$

$$\text{يعني} \quad -2x \times \left(\frac{1}{-2}\right) = -22 \times \left(\frac{1}{-2}\right)$$

يعني $x = 11$ ومنه: $S = \{11\}$ وتسمى مجموعة حلول المعادلة

$$(2) \quad 3(2x+5) = 6x-1 \quad \text{يعني} \quad 6x+15 = 6x-1$$

$$\text{يعني} \quad 6x-6x = -1-15 \quad \text{يعني} \quad 0x = -16 \quad \text{يعني} \quad 0 = -16$$

وهذا غير ممكن ومنه: $S = \emptyset$

$$(3) \quad 4(x-2) = 6x - 2(x+4) \quad \text{يعني} \quad 4x-8 = 6x-2x-8$$

$$\text{يعني} \quad 4x-4x+8-8 = 0 \quad \text{يعني} \quad 0 = 0$$

ومنه: كل عدد حقيقي هو حل لهذه المعادلة وبالتالي: $S = \mathbb{R}$

طريقة 1: (التعميل) $9x^2 - 16 = 0$ يعني $(3x)^2 - 4^2 = 0$

يعني $(3x-4)(3x+4) = 0$ يعني $3x-4 = 0$ أو $3x+4 = 0$

يعني $3x = 4$ أو $3x = -4$ يعني $x = \frac{4}{3}$ أو $x = -\frac{4}{3}$

ومنه: $S = \left\{-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right\}$

طريقة 2: $9x^2 - 16 = 0$ يعني $9x^2 = 16$ يعني $x^2 = \frac{16}{9}$

يعني $x = \sqrt{\frac{16}{9}}$ أو $x = -\sqrt{\frac{16}{9}}$ يعني $x = \frac{4}{3}$ أو $x = -\frac{4}{3}$

$$(5) \quad (2x+3)(9x-3)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

يعني $x - \frac{1}{2} = 0$ أو $9x-3 = 0$ أو $2x+3 = 0$

يعني $x = \frac{1}{2}$ أو $x = \frac{1}{3}$ أو $x = -\frac{3}{2}$

منه: $S = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$

$$(6) \quad \frac{2x+2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5x-2}{2} + \frac{1}{3} \quad (\text{نوحد المقامات})$$

لدينا: $a = 3$ و $b = -5$ و $c = 7$ بما أن: $\Delta = b^2 - 4ac$
 فان: $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 7 \times 3 = 25 - 84 = -59$
 ملاحظة: الرمز Δ يقرأ: دلتا Δ .

2. خاصية:

نعتبر المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) وليكن Δ مميزها.

✓ إذا كان $\Delta < 0$ فان المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$.

✓ إذا كان $\Delta = 0$ فان المعادلة تقبل حلا وجيدا مزدوجا هو: $-\frac{b}{2a}$.

✓ إذا كان $\Delta > 0$ فان المعادلة تقبل حلين مختلفين هما: $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

نرمز لمجموعة حلول المعادلة بالرمز S .

مثال 1: المعادلة $3x^2 + x + 2 = 0$ ليس لها حلا في $\mathbb{R}$

لأن $\Delta < 0$ ($\Delta = 1 - 4 \times 3 \times 2 = -23$) و بالتالي مجموعة حلولها

هي $S = \emptyset$.

مثال 2: المعادلة $x^2 - 10x + 25 = 0$ لها حل وحيد مزدوج

لأن $\Delta = 0$ ($\Delta = 10^2 - 4 \times 25 = 0$).

حل هذه المعادلة هو: $x = \frac{-b}{2a} = 5$

و بالتالي مجموعة حلولها هي $S = \{5\}$.

مثال 3: نعتبر المعادلة $x^2 - 3x + 2 = 0$ لدينا $\Delta = 9 - 4 \times 2 = 1$
 بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ و $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$ ومنه $S = \{1; 2\}$.

تمرين 2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$(1) \Delta > 0 \quad 6x^2 - 7x - 5 = 0 \quad (2) \Delta > 0 \quad 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \quad \Delta = 0$$

$$(3) \Delta < 0 \quad 3x^2 + x + 2 = 0 \quad (4) \Delta < 0 \quad 4x^2 - 8x + 3 = 0$$

$$(5) x^2 - 4x + 2 = 0 \quad (6) x^2 + 5x + 7 = 0$$

$$(7) 2x^2 - 4x + 6 = 0 \quad (8) x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$(9) 3x^2 - 6x + 3 = 0$$

الأجوبة: $6x^2 - 7x - 5 = 0$ و $a = 6$ و $b = -7$ و $c = -5$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 6 \times (-5) = 49 + 120 = 169 = (13)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-7) + \sqrt{169}}{2 \times 6} = \frac{7 + 13}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

$$x_2 = \frac{7 - 13}{12} = \frac{6}{12} = -\frac{1}{2} \quad \text{ومنه:} \quad S = \left\{ \frac{5}{3}, -\frac{1}{2} \right\}$$

$$(2) \quad 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \quad \text{و} \quad a = 2 \quad \text{و} \quad b = -2\sqrt{2} \quad \text{و} \quad c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \times 2 \times 1 = 8 - 8 = 0$$

بما أن $\Delta = 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلا وجيدا هو:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2\sqrt{2})}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ومنه:} \quad S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

$$(3) \quad 3x^2 + x + 2 = 0 \quad \text{و} \quad a = 3 \quad \text{و} \quad b = 1 \quad \text{و} \quad c = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1 - 24 = -23 < 0$$

بما أن $\Delta < 0$ فان المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ ومنه: $S = \emptyset$

$$\frac{4x+4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{15x-6}{6} + \frac{2}{6} \quad \text{يعني}$$

$$\frac{4x+4-3}{6} = \frac{15x-6+2}{6} \quad \text{يعني}$$

$$\frac{4x+1}{6} = \frac{15x-4}{6} \quad \text{يعني} \quad 4x+1 = 15x-4$$

$$-11x = -5 \quad \text{يعني} \quad x = \frac{5}{11} \quad \text{ومنه:} \quad S = \left\{ \frac{5}{11} \right\}$$

$$(7) \quad x^3 - x = 0 \quad \text{يعني} \quad x(x^2 - 1) = 0 \quad \text{(التعميل)}$$

$$x = 0 \quad \text{أو} \quad x^2 - 1 = 0 \quad \text{يعني} \quad x = 0 \quad \text{أو} \quad x^2 = 1$$

$$x = 0 \quad \text{أو} \quad x = \sqrt{1} \quad \text{أو} \quad x = -\sqrt{1} \quad \text{ومنه:} \quad S = \{-1, 0, 1\}$$

تمرين 1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$(1) \quad \frac{x+1}{2} + 4 = \frac{2x-5}{10} + \frac{2(x+10)}{5}$$

$$(2) \quad x^3 - 4x = 0$$

$$(3) \quad (5x-7)(3x-10) = 0$$

$$\text{(الجواب: 1)} \quad \frac{x+1}{2} + 4 = \frac{2x-5}{10} + \frac{2(x+10)}{5} \quad \text{(نوح المقات)}$$

$$\frac{5x+5}{10} + \frac{40}{10} = \frac{2x-5}{10} + \frac{4x+40}{10} \quad \text{يعني}$$

$$\frac{5x+5+40}{10} = \frac{2x-5+4x+40}{10} \quad \text{يعني}$$

$$5x+5+40 = 2x-5+4x+40 \quad \text{يعني} \quad -x = -10$$

$$x = 10 \quad \text{ومنه:} \quad S = \{10\}$$

$$(2) \quad x^3 - 4x = 0 \quad \text{يعني} \quad x(x^2 - 4) = 0 \quad \text{(التعميل)}$$

$$x = 0 \quad \text{أو} \quad x^2 - 4 = 0 \quad \text{يعني} \quad x = 0 \quad \text{أو} \quad x^2 = 4$$

$$x = 0 \quad \text{أو} \quad x = \sqrt{4} \quad \text{أو} \quad x = -\sqrt{4} \quad \text{ومنه:} \quad S = \{-2, 0, 2\}$$

$$(3) \quad (5x-7)(3x-10) = 0 \quad \text{يعني} \quad 5x-7 = 0 \quad \text{أو} \quad 3x-10 = 0$$

$$x = \frac{7}{5} \quad \text{أو} \quad x = \frac{10}{3} \quad \text{ومنه:} \quad S = \left\{ \frac{7}{5}, \frac{10}{3} \right\}$$

II. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

1. تعاريف:

تعريف 1: المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث x هو المجهول و a و b و c أعداد حقيقية معلومة ($a \neq 0$) تسمى معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد.

مثال 1: العدد 1- حل للمعادلة $3x^2 + 5x + 2 = 0$

$$\text{لأن:} \quad 3(-1)^2 + 5(-1) + 2 = 0$$

$$\text{مثال 2: العدد } \sqrt{3} \text{ حل للمعادلة} \quad x^2 + (1-\sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$$

$$\text{لأن:} \quad (\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3} - 3 - \sqrt{3} = 0$$

ملاحظة: كل عدد حقيقي x_0 يحقق المتساوية $ax^2 + bx + c = 0$

هو حل للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$

تعريف 2: نعتبر المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$.

العدد الحقيقي $b^2 - 4ac$ يسمى مميز المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ و نرمز له بالرمز Δ .

مثال: نعتبر المعادلة $3x^2 - 5x + 7 = 0$ (E)

لنحسب مميز المعادلة (E)

أجوبة: (1) $x^2 - 10x + 25$: $a = 1$ و $b = -10$ و $c = 25$
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 1 \times (25) = 100 - 100 = 0$
 بما أن $\Delta = 0$ فإن هذه الحدودية لها جذر وحيد هو:

$$x_1 = \frac{-(-10)}{2 \times 1} = \frac{10}{2} = 5$$

ومنه التعميل: $x^2 - 10x + 25 = a(x - x_1)^2 = 1(x - 5)^2$

(2) $x^2 - 3x + 2$: $a = 1$ و $b = -3$ و $c = 2$
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 = (1)^2 > 0$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه الحدودية لها جذرين هما:

$$x_2 = 1 \text{ و } x_1 = 2 \text{ يعني } x_2 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2 \times 1} \text{ و } x_1 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2 \times 1}$$

ومنه التعميل:

$$x^2 - 3x + 2 = a(x - x_1)(x - x_2) = 1(x - 2)(x - 1)$$

(3) $3x^2 + x + 2$ لدينا:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1 - 24 = -23 < 0$$

ومنه فإن هذه الحدودية لا يمكن تعميلها

تمرين 3: عمل ثلاثيات الحدود التالية:

$$(1) \quad 2x^2 - 4x + 6 \quad (2) \quad 4x^2 - 8x + 3 \quad (3) \quad 3x^2 - 6x + 3$$

أجوبة: (1) $2x^2 - 4x + 6 = 0$: $a = 2$ و $b = -4$ و $c = 6$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (6) = 16 - 48 = -32 < 0$$

ومنه فإن هذه الحدودية لا يمكن تعميلها

$$(2) \quad 4x^2 - 8x + 3 = 0 \quad a = 4 \text{ و } b = -8 \text{ و } c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 4 \times 3 = 64 - 48 = 16 = (4)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه الحدودية لها جذرين هما:

$$x_2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ و } x_1 = \frac{8 + 4}{2 \times 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ومنه التعميل: } 4x^2 - 8x + 3 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = (4x - 2)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

(3) $3x^2 - 6x + 3$: بما أن $\Delta = 0$ فإن هذه الحدودية لها جذر وحيد هو:

$$x_1 = \frac{-(-6)}{2 \times 3} = 1$$

ومنه التعميل: $3x^2 - 6x + 3 = a(x - x_1)^2 = 3(x - 1)^2$

III. المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

إشارة الحدانية: $ax + b$: $a \neq 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	إشارة a	0	عكس إشارة a

ملخص:

مثال 1: لنحدد إشارة $2x + 1$

$$2x + 1 = 0 \text{ يكافئ } x = -\frac{1}{2}$$

و بما أن $a = 2$ و $a > 0$ جدول إشارة $2x + 1$ هو كالتالي:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x + 1$	-	0	+

$$(4) \quad 4x^2 - 8x + 3 = 0 \quad a = 4 \text{ و } b = -8 \text{ و } c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 3 \times (4) = 64 - 48 = 16 = (4)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-(-8) - \sqrt{16}}{2 \times 4} \text{ و } x_1 = \frac{-(-8) + \sqrt{16}}{2 \times 4}$$

$$S = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\} \text{ ومنه: } x_2 = \frac{8 - 4}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ و } x_1 = \frac{8 + 4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$(5) \quad x^2 - 4x + 2 = 0 \quad a = 1 \text{ و } b = -4 \text{ و } c = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (2) = 16 - 8 = 8 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{8}}{2 \times 1} \text{ و } x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{8}}{2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(2 + \sqrt{2})}{2} = 2 + \sqrt{2}$$

$$S = \{2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\} \text{ ومنه: } x_2 = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(2 - \sqrt{2})}{2} = 2 - \sqrt{2}$$

$$(6) \quad x^2 + 5x + 7 = 0 \quad a = 1 \text{ و } b = 5 \text{ و } c = 7$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 1 \times 7 = 25 - 28 = -3 < 0$$

بما أن $\Delta < 0$ فإن المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ ومنه: $S = \emptyset$

$$(7) \quad 2x^2 - 4x + 6 = 0 \quad a = 2 \text{ و } b = -4 \text{ و } c = 6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 16 - 48 = -32 < 0$$

بما أن $\Delta < 0$ فإن المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ ومنه: $S = \emptyset$

$$(8) \quad x^2 - 4x - 21 = 0 \quad a = 1 \text{ و } b = -4 \text{ و } c = -21$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-21) = 16 + 84 = 100 = (10)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{100}}{2 \times 1} \text{ و } x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{100}}{2 \times 1}$$

$$S = \{-3, 7\} \text{ ومنه: } x_2 = \frac{4 - 10}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \text{ و } x_1 = \frac{4 + 10}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$(9) \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0 \quad a = 3 \text{ و } b = -6 \text{ و } c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 36 - 36 = 0$$

بما أن $\Delta = 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا مزدوجا هو:

$$S = \{1\} \text{ ومنه: } x = \frac{-(-6)}{2 \times 3} = \frac{6}{6} = 1 \text{ يعني } x = \frac{-b}{2a}$$

3. تعميل ثلاثية الحدود: $ax^2 + bx + c$

خاصية: نعتبر ثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$ و ليكن Δ مميزها.

1. إذا كان: $\Delta > 0$ فإن المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2 .

$$\text{و لدينا: } ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$2. \text{ إذا كان: } \Delta = 0 \text{ فإن: } ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

3. إذا كان: $\Delta < 0$ فإن: $ax^2 + bx + c$ لا يمكن تعميلها إلى حدوديتين من الدرجة الأولى.

أمثلة: عمل ثلاثيات الحدود التالية:

$$(1) \quad x^2 - 10x + 25 \quad (2) \quad x^2 - 3x + 2 \quad (3) \quad 3x^2 + x + 2$$

$$S =]-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}; +\infty[$$

$$(1-x)(2x+4) > 0 \quad (2)$$

$$(1-x)(2x+4) = 0 \quad \text{يعني} \quad 1-x=0 \quad \text{أو} \quad 2x+4=0$$

$$x=1 \quad \text{أو} \quad x=-2$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
2x+4	-	0	+	+
1-x	+	+	0	-
(1-x)(2x+4)	-	0	+	-

$$S =]-2; 1[$$

$$9x^2 - 25 < 0 \quad \text{المترابحة: } \mathbb{R} \quad \text{حل في } \mathbb{R}$$

$$(2) \text{ إشارة ثلاثية الحدود } ax^2 + bx + c \text{ وحل مترابحات من}$$

$$\text{الدرجة الثانية:}$$

$$\text{الحالة 1: إذا كان } \Delta > 0 \text{ و } x_1 \text{ و } x_2 \text{ هما جذري ثلاثية الحدود فان:}$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$P(x) = ax^2 + bx + c$	إشارة a	0	عكس إشارة a	إشارة a

$$\text{الحالة 2: إذا كان } \Delta = 0 \text{ و } x_1 \text{ هو الجذر الوحيد المزدوج فان:}$$

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$P(x) = ax^2 + bx + c$	إشارة a	0	إشارة a

$$\text{الحالة 3: إذا كان } \Delta < 0 \text{ فان إشارة } P(x) \text{ هي إشارة العدد } a \text{ فان:}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x) = ax^2 + bx + c$	إشارة a	إشارة a

$$\text{مثال 1:}$$

$$1. \text{ أدرس إشارة الحدودية } P(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

$$2. \text{ حل في } \mathbb{R} \text{ المترابحة: } 2x^2 - 3x + 1 \geq 0$$

$$\text{جوبة (1): } P(x) = 2x^2 - 3x + 1 \quad a = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

$$\text{بما أن } \Delta > 0 \text{ فان للحدودية جذرين هما:}$$

$$x_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{3+1}{4} = 1$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
P(x)	+	0	-	+

$$(2) \text{ حل المترابحة: } S =]-\infty; \frac{1}{2}] \cup [1; +\infty[$$

$$\text{مثال 2:}$$

$$1. \text{ أدرس إشارة الحدودية } P(x) = -2x^2 + 4x - 2$$

$$2. \text{ حل في } \mathbb{R} \text{ المترابحة: } -2x^2 + 4x - 2 > 0$$

$$\text{جوبة (1): } P(x) = -2x^2 + 4x - 2 \quad a = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 16 - 16 = 0$$

$$\text{بما أن } \Delta = 0 \text{ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد هو: } x_1 = \frac{-(-4)}{2 \times (-2)} = 1$$

$$\text{مثال 2: لنحدد إشارة } -x + 2$$

$$-x + 2 = 0 \quad \text{يكافئ} \quad x = 2$$

$$\text{و بما أن: } a = -1 \text{ و } a < 0 \text{ فان جدول إشارة } -x + 2 \text{ هو كالتالي:}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
-x+2	-	0	+

$$\text{مثال 3: حل في } \mathbb{R} \text{ المترابحة التالية: } 3x + 6 \geq 0$$

$$3x + 6 = 0 \quad \text{يكافئ} \quad x = -2$$

$$\text{و بما أن: } a = 3 \text{ و } a > 0 \text{ فان جدول الإشارة هو كالتالي:}$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
3x+6	-	0	+

$$\text{و منه فان}$$

$$S = [-2; +\infty[$$

$$\text{مثال 4: حدد إشارة: } -3x + 9$$

$$\text{وحل في } \mathbb{R} \text{ المترابحة: } -3x + 9 < 0$$

$$\text{تمرين 4: حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المترابحات التالية:}$$

$$(1) \quad -2x + 12 > 0 \quad (2) \quad 5x - 15 \leq 0$$

$$\text{أجوبة (1): } -2x + 12 > 0 \quad \text{يكافئ} \quad -2x + 12 = 0 \quad \text{يكافئ} \quad x = 6$$

$$\text{و بما أن: } a = -2 \text{ و } a < 0 \text{ فان جدول الإشارة هو كالتالي:}$$

x	$-\infty$	6	$+\infty$
-2x+12	+	0	-

$$\text{و منه فان: } S =]-\infty; 6[$$

$$(2) \quad 5x - 15 \leq 0 \quad \text{يكافئ} \quad 5x - 15 = 0 \quad \text{يكافئ} \quad x = 3$$

$$\text{و بما أن: } a = 5 \text{ و } a > 0 \text{ فان جدول الإشارة هو كالتالي:}$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
5x-15=0	-	0	+

$$\text{و منه فان: } S =]-\infty; 3]$$

$$\text{IV. مترابحات تؤول في حلها الى مترابحات من الدرجة}$$

$$\text{الأولى بمجهول واحد:}$$

$$(1) \text{ حل مترابحات تؤول في حلها الى مترابحات من}$$

$$\text{الدرجة الأولى بمجهول واحد:}$$

$$\text{مثال 1: أو تمرين 5: حل في } \mathbb{R} \text{ المترابحات التالية:}$$

$$(1) \quad 4x^2 - 9 \geq 0 \quad (2) \quad (1-x)(2x+4) > 0$$

$$\text{أجوبة (1): } 4x^2 - 9 \geq 0$$

$$4x^2 - 9 = 0 \quad \text{يعني} \quad 4x^2 - 3^2 = 0 \quad \text{يعني} \quad (2x-3)(2x+3) = 0$$

$$\text{يعني} \quad 2x+3=0 \quad \text{أو} \quad 2x-3=0 \quad \text{يعني} \quad x = \frac{-3}{2} \quad \text{أو} \quad x = \frac{3}{2}$$

$$\text{الطريقة: في جدول نعطي إشارة كل عامل على الشكل } ax + b$$

$$\text{استنتج إشارة}$$

$$\text{الجاء أو الخارج مع ترتيب تزايد للقيم التي ينعلم فيها كل عامل.}$$

x	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
2x+3	-	0	+
2x-3	-	0	+
(2x-3)(2x+3)	+	0	+

أجوبة: (1) $2 \times 0 + 3 \times \frac{2}{3} = 2$ إذن : $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ حل للمعادلة

(2) $x = 2$ إذن : $2 \times 2 + 3 \times y = 2$ يعني : $y = -\frac{2}{3}$ إذن : $\left(2, -\frac{2}{3}\right) \in S$

$x = 3$ إذن : $2 \times 3 + 3 \times y = 2$ يعني : $y = -\frac{4}{3}$ إذن : $\left(3, -\frac{4}{3}\right) \in S$

$x = 4$ إذن : $2 \times 4 + 3 \times y = 2$ يعني : $y = -2$ إذن : $(4, -2) \in S$

(3) $2x + 3y = 2$ يعني $3y = -2x + 2$ يعني $y = \frac{-2x+2}{3}$

يعني $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ إذن : $S = \left\{ \left(x, -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right) / x \in \mathbb{R} \right\}$

تمرين 8: حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلات التالية :

(1) $2x - 8y + 10 = 0$ (2) $-3x + 12y - 2 = 0$

(3) $7x - 14y + 1 = 0$

أجوبة: (1) $2x - 8y + 10 = 0$ يعني $2x = 8y - 10$ يعني $x = \frac{8y-10}{2}$

يعني $y = 4x - 5$ إذن : $S = \{(x; 4x - 5) / x \in \mathbb{R}\}$

(2) $-3x + 12y - 2 = 0$ يعني $12y = 3x + 2$ يعني $y = \frac{3x+2}{12}$

يعني $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}$ إذن : $S = \left\{ \left(x; \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}\right) / x \in \mathbb{R} \right\}$

(3) $7x - 14y + 1 = 0$ يعني $7x = 14y - 1$ يعني $x = \frac{14y-1}{7}$

يعني $x = 2y - \frac{1}{7}$ إذن : $S = \left\{ \left(2y - \frac{1}{7}; y\right) / y \in \mathbb{R} \right\}$

2. أنظمة معادلتين:

نعتبر النظام: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ حيث a و b و a' و b' و c و c' أعداد حقيقية.

هناك عدة طرق لحل أنظمة سبق أن درست طريقتين هما طريقة التعويض و التاليفة الخطية طبعاً هناك طريقة أخرى انتبه

a. طريقة التعويض :

مثال: حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظام التالية : $\begin{cases} 4x + y = 10 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases}$

الجواب :

نبحث عن y في المعادلة الأولى مثلاً

$4x + y = 10$ يعني $y = 10 - 4x$

ونعوض y بقيمتها في المعادلة الثانية

$-5x + 2(10 - 4x) = -19$ يعني $-5x + 20 - 8x = -19$

يعني $-13x = -39$ يعني $x = 3$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $-5x + 2y = -19$ فنجد $y = -2$

ومنه : $S = \{(3, -2)\}$

b. طريقة التاليفة الخطية

مثال: حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظام التالية : $\begin{cases} 4x + y = 10 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases}$

الجواب :

نضرب المعادلة الأولى في العدد (-2) فنحصل على :

$\begin{cases} -8x - 2y = -20 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases}$ وجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:

$-13x = -39$ يعني $x = 3$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$P(x) = -2x^2 + 4x - 2$	-	0	-

(2) حل المتراحة : $S = \mathbb{R}$

مثال 3:

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x) = 3x^2 + 6x + 5$

2. حل في $\mathbb{R}$ المتراحة : $3x^2 + 6x + 5 < 0$

أجوبة: (1) $P(x) = 3x^2 + 6x + 5$ $a = 3 > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 36 - 60 = -24 < 0$ ومنه:

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x) = 3x^2 + 6x + 5$	+	+

(2) حل المتراحة : $S = \emptyset$

تمرين 7: حل في $\mathbb{R}$ المتراحات التالية :

(1) $2x^2 - 4x + 6 \geq 0$ (2) $4x^2 - 8x + 3 \leq 0$ (3)

$x^2 - 3x - 10 < 0$

أجوبة: (1) $2x^2 - 4x + 6 \geq 0$ $a = 2 > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 16 - 48 = -32 < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x) = 3x^2 + 6x + 5$	+	+

ومنه : $S = \mathbb{R}$

(2) $4x^2 - 8x + 3 \leq 0$ $a = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 4 \times 3 = 64 - 48 = 16 > 0$

بما أن $\Delta > 0$ فإن للحدودية جذرين هما:

$x_1 = \frac{8+4}{2 \times 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ و $x_2 = \frac{8-4}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ومنه:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$4x^2-8x+3$	+	0	-	0	+

$S = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$

(3) $x^2 - 3x - 10 < 0$ $a = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 40 = 49 > 0$

بما أن $\Delta > 0$ فإن للحدودية جذرين هما:

$x_1 = 5$ و $x_2 = -2$ ومنه:

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$	
$x^2-3x-10$	$+$	0	$-$	0	$+$

$S =]-2, 5[$

V. النظمات:

1. معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين:

مثال وأنشطة:

$\mathbb{R}^2$ هي مجموعة الأزواج (x, y) حيث $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$.

مثال: نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $2x + 3y = 2$

(1) تأكد أن الزوج $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ حل للمعادلة : $2x + 3y = 2$

(2) اعط ثلاث أزواج حلول للمعادلة : $2x + 3y = 2$

(3) حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $2x + 3y = 2$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -35 + 12 = -23 \neq 0 \text{ هي: (1) محددة النظام}$$

و منه النظام تقبل حلا وحيدا:

$$S = \left\{ \left(-\frac{14}{23}, -\frac{2}{23} \right) \right\} \text{ هو: } y = \frac{\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{2}{23} \text{ و } x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{14}{23}$$

تمارين للبحث

تمرين 1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$4x^2 - 8x + 3 = 0 \quad (2) \quad 2x^2 - 4x + 6 = 0 \quad (1)$$

$$2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \quad (4) \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 + 5x + 7 = 0 \quad (6) \quad x^2 - 4x + 2 = 0 \quad (5)$$

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 5x + 3y = 50 \end{cases} \text{ (تمرين 2 : 1) حل جبريا النظام التالية :}$$

(2) ملأ شخص أربع عشرة قنينة بخمس لترات من عصير فواكه .
إذا علمت أن القنينات نوعان : قنينات سعة كل واحدة منها 0,5
لتر و قنينات سعة كل واحدة منها 0,3 لتر، حدد عدد القنينات من كل نوع .

تمرين 3:

$$(1) \text{ حل المعادلة : } (2x - 3)(4 - 3x) = 0$$

$$(2) \text{ حل المتراجحة : } 5x - 2 < 2(x + 5)$$

(3) اشترى شخص محسبة و كتابا بثمن 153 درهما .
إذا علمت أن نصف ثمن المحسبة ينقص بثمانية عشر درهما عن
ثلاثي ثمن الكتاب، أحسب ثمن المحسبة .

تمرين 4:

$$(1) \text{ حل النظام : } \begin{cases} x + y = 20 \\ 2x + 5y = 61 \end{cases}$$

(2) يتوفر أحمد على 61 درهما موزعة على 20 قطعة نقدية
بعضها من فئة درهمين ، والبعض الآخر
من فئة خمسة دراهم. أحسب عدد القطع النقدية من كل فئة

تمرين 5:

$$(1) \text{ أ) حل المعادلة التالية : } \frac{2x}{3} - \frac{5}{6} = x - \frac{3}{2}$$

$$\text{ب) حل المتراجحة التالية : } 2 - 3x > x + 7$$

$$(2) \text{ أ) حل النظام : } \begin{cases} 3x + 5y = 72 \\ x + y = 20 \end{cases}$$

ب) واجب زيارة أحد المتاحف هو 3 دراهم للأطفال و 5 دراهم
لل كبار.

أدى فوج من 20 زائر مبلغ 72 درهما لزيارة هذا المتحف.
حدد عدد الأطفال و عدد الكبار في هذا الفوج .

$$(1) \begin{cases} 2x - 5y = -13 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases}$$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $4x + y = 10$ فنجد $y = -2$

و منه: $S = \{(3, -2)\}$

c. طريقة المحددة :

تعريف و خاصية: العدد الحقيقي $ab' - a'b$ يسمى محددة النظام

$$(S) \text{ و نكتب: } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

• إذا كان $\Delta = 0$ فإن النظام (S) قد لا يكون لها أي حل، و قد يكون
لها عدد لا منته من الحلول.

• إذا كان $\Delta \neq 0$ فإن النظام (S) تسمى أنظمة كرامر و تقبل حلا

وحيدا هو الزوج (x, y) حيث:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{ac' - a'c}{\Delta} \text{ و } x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{cb' - c'b}{\Delta}$$

هذه الطريقة تسمى طريقة المحددة.

مثال: طريقة المحددة:

$$\text{حل في } \mathbb{R}^2 \text{ النظام: } (1) \begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x + 4y = 2 \end{cases}$$

$$\text{الجواب : } \text{محددة النظام (1) هي: } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \text{ و منه النظام}$$

تقبل

$$\text{حلا وحيدا: هو: } y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1 \text{ و } x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2$$

تمرين 9: حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظمات التالية :

$$(1) \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x - 2y = -4 \\ -2x + 3y = 5 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} -7x - 3y = 4 \\ 4x + 5y = -2 \end{cases}$$

أجوبة:

$$(1) \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases} \text{ نبحث عن } y \text{ في المعادلة الأولى مثلا}$$

$$2x - y = -1 \text{ يعني } y = 2x + 1$$

ونعوض y بقيمتها في المعادلة الثانية

$$3x + 2(2x + 1) = 9 \text{ يعني } -5x + 2y = -19$$

$$\text{يعني } 7x + 2 = 9 \text{ يعني } 7x = 7 \text{ يعني } x = 1$$

ونعوض x ب 1 في المعادلة $y = 2x + 1$ فنجد $y = 3$

و منه: $S = \{(1, 3)\}$

$$(2) \begin{cases} x - 2y = -4 \\ -2x + 3y = 5 \end{cases}$$

نضرب المعادلة الأولى في العدد (2) فنحصل على :

$$\begin{cases} 2x - 4y = -8 \\ -2x + 3y = 5 \end{cases} \text{ وجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:}$$

$$2x - 4y - 2x + 3y = -8 + 5 \text{ يعني } -y = -3 \text{ يعني } y = 3$$

ونعوض y ب 3 في المعادلة $x - 2y = -4$ فنجد $x = 2$

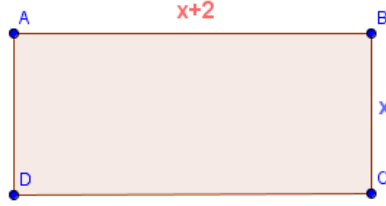
و منه: $S = \{(2, 3)\}$

ترييض وضعيات :

نشاط

أحسب طول عرض مستطيل اذا علمت أن طوله يزيد عن عرضه ب $2cm$ وأن مساحته تساوي $15cm^2$

الجواب



ليكن x وعرض مستطيل اذن طوله هو : $x + 2$ ومنه مساحته هي :

$$S = x(x + 2) = 15$$

ومنه نحصل عن معادلة من الدرجة الثانية :

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \quad : \quad a = 1 \quad \text{و} \quad c = -15 \quad \text{و} \quad b = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 64 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-2 - 8}{2 \times 1} = -5 < 0 \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-2 + 8}{2 \times 1} = 3$$

ومنه: بما أن عرض مستطيل لا يمكن أن يكون سالبا :

$$\text{نأخذ } x = 3$$

وبالتالي طوله هو : $5cm$



حظ سعيد