

الأستاذ:
نجيب
عثماني

مستوى الجذع مشترك أدبي
الدرس الثالث :
الحساب العددي 2: الترتيب في $\mathbb{R}$

أكاديمية
الجهة
الشرقية

محتوى الدرس

الترتيب في $\mathbb{R}$ وخصائصه:
المستقيم العددي ، المجالات ، القيمة المطلقة
الترتيب والعمليات ، التأطير

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

تمثيل عدد على المستقيم العددي
التمكن من مقارنة عددين أو تعبيرين
تأطير مجموع و جداء عددين حقيقيين
تأطير مقلوب وجذر مربع عدد حقيقي
توظيف خاصيات الترتيب والعمليات في تأطير ومقارنة بعض التعابير الجبرية وإنجاز بعض الإكبارات والإصغرات لعدد أو تعبير جبري.
تمثيل تقاطع واتحاد مجالين على المستقيم العددي .

I. تعاريف:

ليكن a و b عددين حقيقيين.

1. نقول إن a أصغر من أو يساوي b , و نكتب $a \leq b$, إذا

كان $(b-a) \in \mathbb{R}^+$

2. نقول إن a أكبر من أو يساوي b , و نكتب $a \geq b$, إذا

كان $(a-b) \in \mathbb{R}^+$

3. نقول إن a أصغر قطعاً من b , و نكتب $a < b$, إذا

كان $(b-a) \in \mathbb{R}_+^*$

4. نقول إن a أكبر قطعاً من b , و نكتب $a > b$, إذا

كان $(a-b) \in \mathbb{R}_+^*$

ملحوظة:

a و b عدنان حقيقيان.

• $a \leq b$ يكافئ $a < b$ أو $a = b$

• إذا كان $a < b$ فإن $a \leq b$

• مقارنة a و b يعني البحث عن التعبير الصحيح من بين التعابير

التالية: $a = b$, $a > b$, $a < b$

أمثلة: لدينا: $3 < \sqrt{5}$, $-\frac{1}{3} < -7$, $2,14 < \pi$

مثال 1 : قارن بين $\frac{101}{102}$ و $\frac{100}{101}$

الجواب:

نحسب الفرق : $\frac{101}{102} - \frac{100}{101} = \frac{101 \times 101 - 100 \times 102}{101 \times 102} = \frac{10201 - 10200}{101 \times 102}$

اذن : $\frac{101}{102} \geq \frac{100}{101}$ ومنه $\frac{101}{102} - \frac{100}{101} = \frac{1}{101 \times 102} \in \mathbb{R}^+$

مثال 2 : قارن : a و b ونضع $a = 2 + \sqrt{3}$ و $b = 2\sqrt{3}$

الجواب:

لدينا $a - b = 2 - \sqrt{3}$, و بما أن $2 - \sqrt{3}$ عدد حقيقي موجب قطعاً

أي: $(a-b) \in \mathbb{R}_+^*$ فإن: $a > b$

مثال 3 : $a \in \mathbb{R}$ قارن : $2a$ و $a^2 + 1$

الجواب : $(a^2 + 1) - 2a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0$

ومنه $a^2 + 1 \geq 2a$ مهما يكن : $a \in \mathbb{R}$

تمرين 1: $a \in \mathbb{R}$ قارن : $4a$ و $4a^2 + 1$

الجواب : $(4a^2 + 1) - 4a = 4a^2 - 4a + 1 = (2a-1)^2 \geq 0$

ومنه $4a^2 + 1 \geq 4a$ مهما يكن : $a \in \mathbb{R}$

II. خاصيات:

لتكن a و b و c و d أعداداً حقيقية.

خاصية:

إذا كان $a \leq b$ و $b \leq c$ فإن $a \leq c$

ملحوظة:

إذا كان $a \leq b$ و $b < c$ فإن $a < c$

الخاصية (1) تعني أنه لمقارنة a و c يكفي مقارنته مع نفس العدد b .

مثال:

لدينا: $\frac{30}{31} < 1$ و $\frac{114,01}{114} < 1$ و منه فإن: $\frac{30}{31} < \frac{114,01}{114}$

خاصية الترتيب و الجمع:

▪ $a \leq b$ يكافئ $a + c \leq b + c$

▪ إذا كان $a \leq b$ و $c \leq d$ فإن $a + c \leq b + d$

▪ إذا كان $a \geq 0$ و $b \geq 0$ فإن $a + b \geq 0$ و $ab \geq 0$.

خاصية الترتيب و الضرب:

▪ إذا كان $c > 0$, فإن: $a \leq b$ يكافئ $ac \leq bc$

▪ إذا كان $c < 0$, فإن: $a \leq b$ يكافئ $ac \geq bc$

▪ إذا كان $0 \leq a \leq b$ و $0 \leq c \leq d$ فإن $0 \leq ac \leq bd$

▪ إذا كان $a \leq 0$ و $b \leq 0$ فإن $a + b \leq 0$ و $ab \geq 0$.

خاصية الترتيب و المقلوب:

a و b عدنان حقيقيان غير منعدمين و لهما نفس إشارة ($ab > 0$)

$$a \leq b \text{ يكافئ } \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

إذا كان $a \leq b$ و $c < d$ فإن $a + c < b + d$.

خاصية الترتيب و المربع- الترتيب و الجذر المربع:

a و b عدنان حقيقيان موجبان.

$$a \leq b \text{ يكافئ } a^2 \leq b^2$$

$$a \leq b \text{ يكافئ } \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$$

$$a^2 \geq 0 : \mathbb{R} \text{ لكل } a$$

ملحوظة:

جميع الخاصيات السابقة تبقى صحيحة اذا عوضنا الرمز $\leq$

بأحد الرمز: $\geq$ أو $<$ أو $>$.

$$\text{إذا كان } a \leq 0 \text{ و } b \leq 0 \text{ يكافئ } a^2 \geq b^2$$

$$\text{مثال 1: قارن العددين: } a = \sqrt{6} \text{ و } b = 2\sqrt{3}$$

$$\text{لدينا } :: (2\sqrt{3})^2 = 2^2 \times \sqrt{3}^2 = 4 \times 3 = 12 \text{ و } (\sqrt{6})^2 = 6 \text{ ومنه}$$

$$\text{ومنه: } a < b$$

$$\text{مثال 2: لنكن } 1 \leq x \leq 2 \text{ و } 7 \leq y \leq 8$$

أعط تأطيرا لكل من $x + y$, $-y$, $x - y$, x^2 , y^2 , $2x$,

$$\frac{x}{y}, \frac{1}{y}, 2x - 3y$$

$$\text{الجواب: } 1 \leq x \leq 2 \text{ و } 7 \leq y \leq 8 \text{ اذن: } 7 + 1 \leq x + y \leq 8 + 2$$

$$8 \leq x + y \leq 10$$

$$-8 \leq -y \leq -7$$

$$x - y = x + (-y)$$

$$\text{لدينا: } 1 \leq x \leq 2 \text{ و } -8 \leq -y \leq -7 \text{ اذن: } -7 \leq x - y \leq -5$$

$$1 \leq x \leq 2 \text{ يعني } 1^2 \leq x^2 \leq 2^2$$

$$7 \leq y \leq 8 \text{ يعني } 7^2 \leq y^2 \leq 8^2$$

$$1 \leq x \leq 2 \text{ يعني } 2 \times 1 \leq 2x \leq 2 \times 2$$

$$7 \leq y \leq 8 \text{ يعني } 3 \times 7 \leq 3y \leq 3 \times 8$$

$$2x - 3y = 2x + (-3y)$$

$$-24 \leq -3y \leq -23 \text{ و } 2 \leq 2x \leq 4$$

$$\text{اذن: } 2 - 24 \leq 2x - 3y \leq 4 - 23$$

$$\text{يعني: } -22 \leq 2x - 3y \leq -19$$

$$7 \leq y \leq 8 \text{ يعني } \frac{1}{8} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{7}$$

$$\text{لدينا } \frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y} \text{ اذن: } 1 \times \frac{1}{8} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 2 \times \frac{1}{7}$$

تمرين 2: نضع $1 \leq y \leq 2$ و $2 \leq x \leq 5$ اعط تأطيرا للأعداد التالية

اعط تأطيرا للأعداد التالية: x^2 و y^2 و $2x$ و $3y$ و $-x$ و

$$-y \text{ و } \frac{1}{y} \text{ و } \frac{1}{x} \text{ و } \frac{x}{y}$$

تمرين 3: التأطير و العمليات

$$1. \text{ تحقق من أن: } 14^2 < 200 < 15^2$$

$$\text{ثم استنتج أن: } 1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

$$2. \text{ تحقق من أن: } 22^2 < 500 < 23^2$$

$$\text{ثم استنتج أن: } 2,2 < \sqrt{5} < 2,3$$

$$3. \text{ استنتج تأطيرا للعددين } \sqrt{2} + \sqrt{5} \text{ و } \sqrt{10}.$$

الجواب:

$$(1) \text{ لدينا } 14^2 = 196 \text{ و } 15^2 = 225 \text{ ومنه } 14^2 < 200 < 15^2$$

$$\text{لدينا } 14^2 < 200 < 15^2 \text{ اذن نستنتج أن: } \sqrt{14^2} < \sqrt{200} < \sqrt{15^2}$$

$$\text{اذن: } \sqrt{14^2} < \sqrt{2 \times 100} < \sqrt{15^2} \text{ أي: } 14 < \sqrt{2} \times 10 < 15$$

$$\text{أي: } 14 \times \frac{1}{10} < \sqrt{2} \times 10 \times \frac{1}{10} < 15 \times \frac{1}{10}$$

$$\text{اذن نستنتج أن: } 1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

$$(2) \text{ لدينا } 22^2 = 484 \text{ و } 23^2 = 529 \text{ ومنه } 22^2 < 500 < 23^2$$

$$\text{لدينا } 22^2 < 500 < 23^2 \text{ اذن نستنتج أن: } \sqrt{22^2} < \sqrt{500} < \sqrt{23^2}$$

$$\text{اذن: } \sqrt{14^2} < \sqrt{2 \times 100} < \sqrt{15^2} \text{ أي: } 22 < \sqrt{5} \times 10 < 23$$

$$\text{أي: } 22 \times \frac{1}{10} < \sqrt{5} \times 10 \times \frac{1}{10} < 23 \times \frac{1}{10}$$

$$\text{اذن نستنتج أن: } 2,2 < \sqrt{5} < 2,3$$

$$(3) \text{ لدينا } 1,4 < \sqrt{2} < 1,5 \text{ و } 2,2 < \sqrt{5} < 2,3$$

$$\text{اذن: } 1,4 + 2,2 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 1,5 + 2,3 \text{ أي: } 3,6 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 3,8$$

$$\text{و أيضا بضرب طرف لطرف نجد: } 1,4 \times 2,2 < \sqrt{2} \times \sqrt{5} < 1,5 \times 2,3$$

$$\text{أي: } 3,08 < \sqrt{10} < 3,45$$

تمرين 4:

$$1. \text{ أحسب: } (5 - 3\sqrt{2})^2$$

$$2. \text{ قارن العددين: } 5 \text{ و } 3\sqrt{2}$$

$$3. \text{ بسط: } \sqrt{43 - 30\sqrt{2}}$$

$$\text{الجواب: } (1) (3\sqrt{2} - 5)^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 5 + (5)^2 = 18 - 30\sqrt{2} + 25$$

$$(3\sqrt{2} - 5)^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 5 + (5)^2 = 43 - 30\sqrt{2}$$

$$(2) \text{ لمقارنة العددين نقارن مربعيهما: } (3\sqrt{2})^2 = 18 \text{ و } (5)^2 = 25$$

$$\text{اذن } 5 > 3\sqrt{2} \text{ ومنه } 5 - 3\sqrt{2} \in \mathbb{R}^+$$

$$(3) \sqrt{43 - 30\sqrt{2}} = \sqrt{(5 - 3\sqrt{2})^2} = |5 - 3\sqrt{2}|$$

$$= 5 - 3\sqrt{2} \text{ لأن: } 5 - 3\sqrt{2} \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{وبالتالي: } \sqrt{43 - 30\sqrt{2}} = 5 - 3\sqrt{2}$$

III. القيمة المطلقة:

$$1. \text{ إذا كان } x \geq 0 \text{ فان: } |x| = x$$

$$2. \text{ إذا كان } x \leq 0 \text{ فان: } |x| = -x$$

$$\text{مثال: } |3| = 3 \text{ و } \left| -\frac{3}{5} \right| = \frac{3}{5} \text{ و } |1 - \sqrt{3}| = -(1 - \sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3}$$

$$|\pi - 4| = -(\pi - 4) = -\pi + 4 \text{ و } |3 - \sqrt{5}| = 3 - \sqrt{5}$$

IV. المحالات:

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a < b$. ندرج في الجدولين التاليين

جميع أنواع

المجالات و تمثيلها على

المستقيم العددي.

$$1 \leq x \leq 3 \text{ يعني } 2 \times 1 \leq 2x \leq 2 \times 3 \text{ يعني } 2 \leq 2x \leq 6$$

$$2 \leq y \leq 4 \text{ يعني } 3 \times 2 \leq 3 \times y \leq 3 \times 4 \text{ يعني } 6 \leq 3y \leq 12$$

$$1 \leq x \leq 3 \text{ يعني } \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{1} \text{ يعني } \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq 1$$

$$2 \leq y \leq 4 \text{ يعني } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{لدينا } \frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y} : \text{اذن } 1 \times \frac{1}{4} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 3 \times \frac{1}{2} \text{ اذن } \frac{1}{4} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{3}{2}$$

2) تأطير A: $6 \leq 3y \leq 12$ يعني $-12 \leq -3y \leq -6$
وحسب النتائج السابقة وجمع المتفاوتات طرف لطرف نجد:
 $1 + 4 + 2 - 12 \leq x^2 + y^2 + 2x - 3y \leq 9 + 16 + 6 - 6$
وبالتالي: $-5 \leq A \leq 25$
تأطير B

$$B = \frac{2x-1}{x+1} = (2x-1) \times \frac{1}{x+1}$$

لدينا $1 \leq x \leq 3$ يعني $2 \leq 2x \leq 6$ يعني $2-1 \leq 2x-1 \leq 6-1$
يعني $1 \leq 2x-1 \leq 5$

لدينا $1 \leq x \leq 3$ يعني $2 \leq x+1 \leq 4$ يعني $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$

وبضرب المتفاوتتين التاليتين $1 \leq 2x-1 \leq 5$ و $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$

طرف لطرف نجد

$$\frac{1}{4} \leq B \leq \frac{5}{2} \text{ يعني } 1 \times \frac{1}{4} \leq (2x-1) \times \frac{1}{x+1} \leq 5 \times \frac{1}{2}$$

المجالات المحدودة:

المتفاوتة	المجال
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$
$a < x \leq b$	$]a, b]$
$a \leq x < b$	$[a, b[$
$a < x < b$	$]a, b[$

المجالات غير المحدودة

المتفاوتة	المجال
$x > b$	$]b, +\infty[$
$x \geq b$	$[b, +\infty[$
$x \leq a$	$]-\infty, a]$
$x < a$	$]-\infty, a[$

مصطلحات: الرمز $+\infty$ و $-\infty$ ليسا بعددين

- $+\infty$ تقرأ: زائد اللانهاية, $-\infty$ تقرأ: ناقص اللانهاية.
- $[a, b]$ يقرأ: "المجال المغلق a, b " أو "القطعة a, b "
- $]a, b[$ يقرأ "المجال المفتوح a, b "
- $]a, +\infty[$ يقرأ "المجال a , زائد اللانهاية, مفتوح من a "

تمرين 5: مثل على مستقيم للمجالين I و J

وحدد اتحاد وتقاطع المجالين I و J في الحالات الآتية

$$I =]-3, 7] \text{ و } J = [-1, +\infty[$$

$$I =]-\infty, 5[\text{ و } J = [4, 10]$$

$$I = [0, 10[\text{ و } J = [-5, -1]$$

الجواب:

$$I \cup J =]-3, +\infty[\quad I \cap J =]-1, 7]$$

$$I \cup J =]-\infty, 10[\quad I \cap J = [4, 5[$$

$$I \cup J = [-5, 10] \quad I \cap J = \emptyset$$

تمرين 6: نضع $x \in [1; 3]$ و $y \in [2; 4]$

(1) اعط تأطيرا للأعداد التالية: x^2 و y^2 و $2x$ و $3y$

$$-x \text{ و } -y \text{ و } \frac{1}{x} \text{ و } \frac{1}{y}$$

(2) اعط تأطيرا لكل من A و B : $A = x^2 + y^2 + 2x - 3y$ و

$$B = \frac{2x-1}{x+1}$$

الجواب (1): $x \in [1; 3]$ يعني $1 \leq x \leq 3$

$$y \in [2; 4] \text{ يعني } 2 \leq y \leq 4$$

$$1 \leq x \leq 3 \text{ يعني } 1^2 \leq x^2 \leq 3^2$$

$$2 \leq y \leq 4 \text{ يعني } 2^2 \leq y^2 \leq 4^2$$