

الأستاذ:
نجيب
عثماني

مستوى الجذع مشترك أدبي
مذكرة رقم 1 : الحساب العددي

أكاديمية
الجهة
الشرقية

محتوى الدرس

مجموعة الأعداد
العمليات في المجموعة IR وخصائصها
المتطابقات الهامة
القوى ذات الأس الصحيح النسبي، قوى العدد 10 ، الكتابة العلمية لعدد عشري
الجذور المربعة والعمليات في IR
التناسبية

القدرات المنتظرة

- التمكن من تقنيات الحساب العددي
- التمييز بين مجموعات الأعداد
- التمييز بين عدد وقيمة مقربة له
- توظيف المتطابقات الهامة في نشر وتعميل بعض التعبيرات الجبرية
- توظيف التناسبية في حل مسائل متنوعة

توجيهات تربوية

تهدف هذه الفقرة إلى توظيف مختلف المعارف المكتسبة حول مجموعات الأعداد وإدخال الرموز الخاصة بالمجموعات. كما تهدف إلى تنظيم وتثبيت وتقوية المعارف والقدرات المكتسبة بالتعليم الثانوي الإعدادي .
انطلاقا من أنشطة وتمارين، يقدم الجذر المربع لعدد صحيح طبيعي الذي ليس مربعا كاملا، كمثال لعدد لا جذري .
اختيار أنشطة تبرز دور الرياضيات في معالجة وضعية مستقاة من الواقع المعيش، وتمثل التناسبية أحد أوجه هذا الاستعمال .
ينبغي تزويد التلميذ بالمعلومات الأساسية المتعلقة بالآلة الحاسبة العلمية (حساب جذر مربع، مجاميع جبرية، قيم مقربة ...)

I. مجموعات الأعداد

نشاط : من بين الأعداد التالية حدد تلك التي تمثل أعدادا صحيحة

طبيعية : 2, -5, 11, $\frac{11}{4}$, 12-17, $\sqrt{2}$, $\sqrt{16}$, 2, 5 .

■ الأعداد الصحيحة الطبيعية تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$ و نكتب: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$

■ الأعداد الصحيحة النسبية أي الأعداد الصحيحة الطبيعية و مقابلاتها تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}$ و نكتب: $\mathbb{Z} = \{\dots -3; -2; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

■ الأعداد العشرية تكون مجموعة نرمز لها بالرمز D

■ الأعداد الجذرية أي الأعداد التي تكتب على الشكل $\frac{a}{b}$ حيث:

$a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{N}^*$ تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{Q}$.

■ الأعداد الجذرية و اللاجذرية تكون مجموعة الأعداد الحقيقية و نرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$.

أنشطة : استعمال الرموز: $\mathbb{Z}; \mathbb{Q}; \mathbb{R}; \mathbb{D}$

العدد -7 هو عنصر من $\mathbb{Z}$ نكتب $-7 \in \mathbb{Z}$ -نقرأ: "-7 ينتمي الى $\mathbb{Z}$ "

في حين -7 لا ينتمي الى $\mathbb{N}$ و نكتب $-7 \notin \mathbb{N}$ ولدينا $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ لكن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ لأنه لا يمكن ايجاد عددين صحيحين a و b

بحيث $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ و b غير منعدم.

كل عدد صحيح طبيعي هو عدد صحيح نسبي، نقول ان المجموعة $\mathbb{N}$ توجد ضمن $\mathbb{Z}$ و نكتب $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

ليس كل عدد عشري هو عدد صحيح نسبي، نقول ان المجموعة D ليست ضمن $\mathbb{Z}$ و نكتب $D \not\subset \mathbb{Z}$.

لأن هناك عناصر من D لا تنتمي الى $\mathbb{Z}$.

كذلك: كل عنصر من D هو عنصر من $\mathbb{Q}$: $D \subset \mathbb{Q}$

و كل عنصر من $\mathbb{Q}$ هو عنصر من $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ لدينا

اذن: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset D \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

تمرين 1: باستعمال الرموز: $\mathbb{Z}; \mathbb{Q}; \mathbb{R}; \mathbb{D}$ املأ الفراغات التالية :

$\mathbb{Z} \dots -7$ و $\mathbb{Q} \dots \frac{2}{3}$ و $\mathbb{Q} \dots \sqrt{2}$ و $\mathbb{R} \dots \sqrt{2}$

و $\mathbb{Q} \dots \mathbb{R}$ و $\mathbb{N} \dots \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}^+ \dots -\frac{2}{3}$ و $\mathbb{N} \dots \frac{2}{3}$ و $\mathbb{N} \dots \frac{6}{2}$

$\mathbb{N} \dots \frac{\sqrt{100}}{5}$ و $\mathbb{Z} \dots \mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q} \dots \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} \dots \pi$ و $\mathbb{Q}^* \dots -\frac{7}{3}$ و $\mathbb{Q} \dots \sqrt{2}$ و

$\mathbb{N} \dots \sqrt{16}$ و $\mathbb{N} \dots \mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}^* \dots 0$

II. العمليات في المجموعة $\mathbb{R}$ وخصائصها

1. العمليات في المجموعة $\mathbb{R}$

الجمع في $\mathbb{R}$

a و b و c أعداد حقيقية

$$a + b = b + a \quad (1)$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c \quad (2)$$

$$F = \frac{4}{7} \times \frac{14}{6} - \frac{25}{8} \times \frac{3}{15} \quad E = \frac{3}{4} + \frac{5}{3} - \frac{7}{6} \quad \text{و} \quad D = \frac{\frac{5}{3} - 1}{-3\frac{2}{7}}$$

$$H = \left(1 - \frac{4}{3}\right)^2 \quad G = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{3} + 1 - \frac{3}{2}\right)$$

الأجوبة :

$$A = -\frac{5}{9} + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} = -\frac{5}{9} + \frac{10}{3} = \frac{-5+30}{9} = \frac{25}{9}$$

$$B = -3(-11) + 7 - 5 + 8 - 10 = 33 + 7 - 5 + 8 - 10$$

$$B = 33 + 7 + 8 - 5 - 10 = 48 - 15 = 33$$

$$C = 3a - 4b + c + 11a - 3b - 7c = 14a - 7b - 6c$$

$$D = \frac{\frac{5}{3} - 1}{-3\frac{2}{7}} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{6}{7}} = -\frac{2}{3} \times \frac{7}{6} = -\frac{7}{9}$$

$$E = \frac{3}{4} + \frac{5}{3} - \frac{7}{6} = \frac{9}{12} + \frac{20}{12} - \frac{14}{12} = \frac{9+20-14}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

$$F = \frac{4}{7} \times \frac{14}{6} - \frac{25}{8} \times \frac{3}{15} = \frac{4}{7} \times \frac{7}{3} - \frac{5}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{4}{3} - \frac{5}{32} = \frac{32-15}{96} = \frac{17}{96}$$

$$G = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{3} + 1 - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{3} - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{10-9}{6}\right) = \frac{1}{12}$$

$$G = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$H = \left(1 - \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{3-4}{3}\right)^2 = \left(\frac{-1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

تمرين 2: أحسب و بسط :

$$\text{و} \quad B = 3(-12) - 5 + 14 - 10 \quad \text{و} \quad A = \frac{3}{4} + \frac{5}{3} - \frac{7}{6}$$

$$C = 3a - 5b + 5c - 2a - 4b - 3c - a - 2c$$

$$F = \frac{4}{3} \times \frac{12}{15} - \frac{16}{3} \times \frac{6}{8} \quad E = \frac{-2}{3} + \frac{7}{6} - \frac{1}{4} - 2 \quad \text{و} \quad D = \frac{5 + \frac{1}{3}}{2 - \frac{3}{2}}$$

$$M = \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{2}\right)^2 \quad H = \left(1 - \frac{5}{2}\right)^2 \quad G = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{5} + 1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$N = [(a-c) - (a-b)] - [(c-a) + (b-c)]$$

الأجوبة :

$$A = \frac{3}{4} + \frac{5}{3} - \frac{7}{6} = \frac{9}{12} + \frac{20}{12} - \frac{14}{12} = \frac{9+20-14}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

$$B = 3(-12) - 5 + 14 - 10$$

$$B = -36 - 5 + 14 - 10 = -41 + 4 = -37$$

$$C = 3a - 5b + 5c - 2a - 4b - 3c - a - 2c = -9b$$

$$D = \frac{5 + \frac{1}{3}}{2 - \frac{3}{2}} = \frac{\frac{16}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{16}{3} \times \frac{2}{1} = \frac{32}{3}$$

$$E = \frac{-2}{3} + \frac{7}{6} - \frac{1}{4} - 2 = \frac{-8}{12} + \frac{14}{12} - \frac{3}{12} - \frac{24}{12} = \frac{-8+14-3-24}{12} = \frac{-21}{12} = -\frac{7}{4}$$

$$F = \frac{4}{3} \times \frac{12}{15} - \frac{16}{3} \times \frac{6}{8} = \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} - 4 = \frac{16}{15} - 4 = \frac{16-60}{15} = -\frac{44}{15}$$

$$a + 0 = 0 + a = a \quad (3)$$

$$(-a) + a = a + (-a) = 0 \quad (4)$$

الضرب في $\mathbb{R}$: a و b و c أعداد حقيقية

$$a \times b = b \times a = ab = ba \quad .1$$

$$a(bc) = (ab)c = (ac)b = abc \quad .2$$

$$a \neq 0; a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = \frac{a}{a} = 1 \quad .3$$

العمليات على الكسور : a و b و c و d أعداد حقيقية

بحيث $bd \neq 0$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad (1)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad (2)$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} \quad (3)$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad (4)$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad (5)$$

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}; bc \neq 0 \quad (6)$$

$-a$ يسمى مقابل a

$$a - b = a + (-b) \quad (8)$$

$$-(a - b) = -a + b \quad (9)$$

$\frac{1}{a}$ يسمى مقلوب العدد a حيث $a \neq 0$

العدد $\frac{a}{b}$ حيث $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}^*$ يسمى خارج العدد a على b .

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

$$a = bc \text{ يكافئ } \frac{a}{b} = c \quad (11)$$

$$ad = bc \text{ يكافئ } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (12)$$

$$a = b \text{ يكافئ } \frac{a}{b} = 1 \quad (13)$$

$$a = 0 \text{ يكافئ } \frac{a}{b} = 0 \quad (14)$$

أمثلة : أحسب و بسط :

$$\text{و} \quad B = -3(-11) + 7 - 5 + 8 - 10 \quad \text{و} \quad A = -\frac{5}{9} + \frac{5}{3} + \frac{7}{3}$$

$$C = 3a - 4b + c + 11a - 3b - 7c$$

إذن:

$$A = (200520052006)^2 - (200520052005 \times 200520052007) = 1$$

(2) النشر

أمثلة: أنشر: $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & , -2x(3x-4), (3x-1)^2, (\sqrt{2}-3)^2, (2x+1)^2 \\ & , \left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}\right), (3\sqrt{3}-2)(3\sqrt{3}+2), (3x-2)(x+3) \\ & (3x-2)^3 \text{ و } (2x-1)^3, (2x+1)^3, (x-1)^3 \end{aligned}$$

الأجوبة:

$$\begin{aligned} (2x+1)^2 &= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1 \\ (\sqrt{2}-3)^2 &= (\sqrt{2})^2 - 2 \times \sqrt{2} \times 3 + 3^2 = 2 - 6\sqrt{2} + 9 = 11 - 6\sqrt{2} \\ (3x-1)^2 &= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2 = 9x^2 - 6x + 1 \\ -2x(3x-4) &= -6x^2 + 8x \\ (3x-2)(x+3) &= 3x^2 + 9x - 2x - 6 = 3x^2 + 7x - 6 \\ (3\sqrt{3}-2)(3\sqrt{3}+2) &= (3\sqrt{3})^2 - 2^2 = 27 - 4 = 23 \\ \left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}\right) &= \left(\frac{2}{3}x\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{4}{9}x^2 - \frac{9}{25} \\ (x-1)^3 &= (x)^3 - 3(x)^2 \times 1 + 3 \times x \times (1)^2 - (1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ (2x+1)^3 &= (2x)^3 + 3(2x)^2 \times 1 + 3 \times 2x \times (1)^2 + (1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 \\ (2x-1)^3 &= (2x)^3 - 3(2x)^2 \times 1 + 3 \times 2x \times (1)^2 - (1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 \\ (3x-2)^3 &= (3x)^3 - 3(3x)^2 \times 2 + 3 \times 3x \times (2)^2 - (2)^3 = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 \end{aligned}$$

تمرين 4: أنشر: $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & , -3x(4x-2), (5x-2)^2, (\sqrt{3}-2)^2, (3x+1)^2 \\ & , \left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\right), (2\sqrt{5}-3)(2\sqrt{5}+3), (5x-2)(2x+1) \\ & (2x-5)^3 \text{ و } (3x-1)^3, (3x+1)^3, (x-2)^3 \end{aligned}$$

الأجوبة:

$$\begin{aligned} (3x+1)^2 &= (3x)^2 + 2 \times 3x \times 1 + 1^2 = 9x^2 + 6x + 1 \\ (\sqrt{3}-2)^2 &= (\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 2 + 2^2 = 3 - 4\sqrt{3} + 4 = 7 - 4\sqrt{3} \\ (3x-1)^2 &= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2 = 9x^2 - 6x + 1 \\ -3x(4x-2) &= -12x^2 + 6x \\ (5x-2)(2x+1) &= 10x^2 + 5x - 4x - 2 = 10x^2 + x - 2 \\ (2\sqrt{5}-3)(2\sqrt{5}+3) &= (2\sqrt{5})^2 - 3^2 = 20 - 9 = 11 \\ \left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\right) &= \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{4}{9} \\ (x-2)^3 &= (x)^3 - 3(x)^2 \times 2 + 3 \times x \times (2)^2 - (2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \\ (3x+1)^3 &= (3x)^3 + 3(3x)^2 \times 1 + 3 \times 3x \times (1)^2 + (1)^3 = 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 \\ (3x-1)^3 &= (3x)^3 - 3(3x)^2 \times 1 + 3 \times 3x \times (1)^2 - (1)^3 = 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 \\ (2x-5)^3 &= (2x)^3 - 3(2x)^2 \times 5 + 3 \times 2x \times (5)^2 - (5)^3 = 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125 \end{aligned}$$

(3) التعميل

أمثلة: عمل التعبيرات التالية: $A = 3x^2 - 3x$ و $B = 9x - 3$

$$E = x^3 - x^2 \text{ و } D = 1 - (1-3x)^2 \text{ و } C = 4x^2 - 9$$

$$H = 4x^2 + 4x + 1 \text{ و } G = 16 - 25x^2 \text{ و } F = 16x^2 - 8x + 1$$

$$G = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5} + 1 - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{10} + \frac{10}{10} - \frac{5}{10}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{4+10-5}{10}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$G = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$H = \left(1 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{2-5}{2}\right)^2 = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$M = \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{4-15}{6}\right)^2 = \left(\frac{-11}{6}\right)^2 = \frac{(-11)^2}{6^2} = \frac{121}{36}$$

$$N = [(a-c) - (a-b)] - [(c-a) + (b-c)] = (a-c-a+b) - (c-a+b-c)$$

$$N = a-c-a+b-c+a-b+c = a-c$$

تمرين 3: أحسب A و B بحيث $a = -2$; $b = -6$; $c = 5$

$$A = 2a - b(a+b) + c^2 - 3ab + b^2$$

$$B = \frac{a}{b} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{a}{c}$$

III. متطابقات هامة النشر و التعميل:

(1) خاصيات:

لكل a و b من $\mathbb{R}$ لدينا: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (1)$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad (2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \quad (3)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad (4)$$

a و b أعداد حقيقية

$$\blacksquare k(a+b) = ka + kb$$

$$\blacksquare k(a-b) = ka - kb$$

$$\blacksquare (a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd$$

ملحوظة:

ننشر $(a+b)(a+b)^2$ و $(a-b)(a-b)^2$ و نحصل على

المتطابقتين الهامتين التاليتين:

$$\blacksquare (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\blacksquare (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

نشاط:

عندما تعجز الآلة الحاسبة

أحسب:

$$A = (200520052006)^2 - (200520052005 \times 200520052007)$$

نلاحظ أن الأعداد الثلاثة تختلف فقط في رقم وحدتها

لتبسيط الحساب نضع: $x = 200520052006$

إذن: $200520052005 = x-1$ و $200520052007 = x+1$

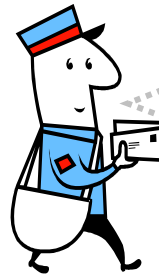
$$\text{و منه: } A = x^2 - (x-1)(x+1)$$

$$= x^2 - (x^2 - 1)$$

$$= x^2 - x^2 + 1$$

$$= 1$$

أجوبة:



التعميل هو كتابة
مجموع على شكل
جداء

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \frac{1}{a^{m-n}}$$

أمثلة: أحسب وبسط حيث $a \in \mathbb{R}^*$

$$a^5 \times a^3 \times a^1 \times a^{-2}, (a^3)^5, (-3)^5, \left(-\frac{1}{3}\right)^4, \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$A = \frac{9^2}{3^{-2}} \times \frac{3^5}{81^3} \quad \text{و} \quad \left(\frac{a}{2}\right)^6, (3a)^2, a^6 \times a^{-3}$$

$$C = 2^3 \times (2^2)^4 \times (2^{-5})^3 \quad \text{و} \quad B = (-5)^2 \times (5^2)^4 \times (5^{-5})^3 \times 5^5$$

$$E = \frac{(-2)^3 \times (4^2)^{-1} \times 8}{1024 \times (-16)^{-4}} \quad D = \frac{3^{-5} \times 4^{-2}}{12^3} \times \frac{9}{2^2}$$

الجواب:

$$(-2)^5 = -32 \quad \text{و} \quad \left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1^4}{3^4} = \frac{1}{81} \quad \text{و} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

$$a^5 \times a^3 \times a^1 \times a^{-2} = a^{5+3+1+(-2)} = a^7 \quad \text{و} \quad ((a^2)^5)^{a^{2 \times 5}} = a^{10}$$

$$(3a)^2 = 3^2 \times a^2 = 9a^2 \quad \text{و} \quad a^6 \times a^{-3} = a^{6+(-3)} = a^3$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^6 = \frac{a^6}{2^6} = \frac{a^6}{64}$$

$$A = \frac{9}{3^{-2}} \times \frac{3^5}{81^3} = \frac{3^2}{3^{-2}} \times \frac{3^5}{9^3} = \frac{3^2}{3^{-2}} \times \frac{3^5}{(3^2)^3}$$

$$A = \frac{3^2 \times 3^5}{3^{-2} \times (3^2)^3} = \frac{3^2 \times 3^5}{3^{-2} \times 3^6} = 3^2 \times 3^5 \times 3^2 \times 3^{-6} = 3^{2+5+2-6} = 3^3 = 27$$

$$B = (-5)^2 \times (5^2)^4 \times (5^{-5})^3 \times 5^5 = 5^2 \times (5^2)^4 \times (5^{-5})^3 \times 5^5$$

$$B = 5^2 \times 5^{2 \times 4} \times 5^{-5 \times 3} \times 5^5 = 5^{2+8-15+5} = 5^0 = 1$$

$$C = 2^3 \times (2^2)^4 \times (2^{-5})^3 = 2^3 \times 2^8 \times 2^{-15} = 2^{3+8-15} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$D = \frac{3^{-5} \times 4^{-2}}{12^3} \times \frac{9}{2^2} = \frac{3^{-5} \times (2^2)^{-2}}{(3 \times 2^2)^3} \times \frac{3^2}{2^2} = \frac{3^{-5} \times (2)^{-4} \times 3^2}{(3)^3 \times 2^6 \times 2^2}$$

$$D = \frac{3^{-5} \times (2)^{-4} \times 3^2}{(3)^3 \times 2^6 \times 2^2} = 3^{-5} \times 2^{-4} \times 3^2 \times (3)^{-3} \times 2^{-6} \times 2^{-2} = 3^{-5-3+2} \times 2^{-4-6-2}$$

$$D = 3^{-6} \times 2^{-12}$$

$$E = \frac{(-2)^3 \times (4^2)^{-1} \times 8}{1024 \times (-16)^{-4}} = \frac{-2^3 \times 4^{2 \times (-1)} \times 2^3}{1024 \times (-2^3)^{-4}} = \frac{-2^3 \times (2^2)^{-2} \times 2^3}{2^{10} \times (-2^3)^{-4}}$$

$$E = -2^3 \times (2^2)^{-2} \times 2^3 \times 2^{-10} \times (-2)^{3 \times 4} = -2^{3-4+3-10+12} = -2^4 = -16$$

تمرين 6: أحسب وبسط حيث $a \in \mathbb{R}^*$

$$a^7 \times a^{-3} \times a^5 \times a^{-8}, ((a^{-2})^3)^4, (-5)^3, \left(-\frac{3}{2}\right)^4, \left(-\frac{3}{5}\right)^3$$

$$A = \frac{4}{2^{-3}} \times \frac{2^5}{16^3} \quad \text{و} \quad \left(\frac{a}{3}\right)^5, (5a)^3, a^7 \times a^{-9}$$

$$C = 2^7 \times (2^5)^2 \times (2^{-5})^3 \quad \text{و} \quad B = (-3)^2 \times (3^2)^4 \times (3^{-5})^3 \times 3^4$$

$$E = \frac{3^{-2} \times (9^2)^3 \times 8}{27 \times 81 \times (-3)^6} \quad D = \frac{5 \times 3^{-2}}{15^2} \times \frac{81}{5^{-4}}$$

$$A = 3x^2 - 3x = 3x(x - 1)$$

$$B = 9x - 3 = 3(3x - 1)$$

$$C = 4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3)$$

$$D = 1 - (1 - 3x)^2 = 1^2 - (1 - 3x)^2 = (1 - (1 - 3x))(1 + (1 - 3x))$$

$$D = (1 - 1 + 3x)(1 + 1 - 3x) = 3x(2 - 3x)$$

$$E = x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$$

$$F = 16x^2 - 8x + 1 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 1 + 1^2 = (4x - 1)^2$$

$$G = 16 - 25x^2 = (4)^2 - (5x)^2 = (4 - 5x)(4 + 5x)$$

$$H = 4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2 = (2x + 1)^2$$

تمرين 5: عمل التعبيرات التالية:

$$A = 6x^3 - 2x$$

$$D = 4 - (2 - x)^2 \quad \text{و} \quad C = 25x^2 - 16 \quad \text{و} \quad B = 12x - 4$$

$$G = 1 - 4x^2 \quad F = 9x^2 - 6x + 1 \quad E = x^4 - 2x^2$$

$$H = 25x^2 + 20x + 4$$

أجوبة:

$$A = 6x^3 - 2x = 2x(3x^2 - 1)$$

$$B = 12x - 4 = 4(3x - 1)$$

$$C = 25x^2 - 16 = (5x)^2 - 4^2 = (5x - 4)(5x + 4)$$

$$D = 4 - (2 - x)^2 = 2^2 - (2 - x)^2 = (2 - (2 - x))(2 + (2 - x))$$

$$D = (2 - 2 + x)(2 + 2 - x) = x(4 - x)$$

$$E = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$$

$$F = 9x^2 - 6x + 1 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2 = (3x - 1)^2$$

$$G = 1 - 4x^2 = (1)^2 - (2x)^2 = (1 - 2x)(1 + 2x)$$

$$H = 25x^2 + 20x + 4 = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 2 + 2^2 = (5x + 2)^2$$

IV. القوى و قوى العدد 10 و الكتابة العلمية:

1) تعريف:

ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم و $n \in \mathbb{N}$.

$$a^1 = a; a^0 = 1$$

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{\text{مرات } n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

لكل a و b من $\mathbb{R}^*$ و لكل m و n من $\mathbb{N}$ لدينا:

$$a^n \times b^n = (ab)^n$$

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{nm} = (a^m)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

الجواب :

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16} \quad \text{و} \quad \left(-\frac{3}{5}\right)^3 = -\frac{3^3}{5^3} = -\frac{27}{125}$$

$$(-5)^3 = -5^3 = -125$$

$$a^7 \times a^{-3} \times a^5 \times a^{-8} = a^{7-3+5-8} = a^1 = a \quad \text{و} \quad ((a)^{-2})^3 = a^{-2 \times 3} = a^{-6}$$

$$a^7 \times a^{-9} = a^{7+(-9)} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

$$(5a)^3 = 5^3 \times a^3 = 125a^3$$

$$\left(\frac{a}{3}\right)^5 = \frac{a^5}{3^5} = \frac{a^5}{243}$$

$$A = \frac{4}{2^3} \times \frac{2^5}{16^3} = \frac{2^2 \times 2^5}{2^3 \times 2^{12}} = 2^2 \times 2^5 \times 2^3 \times 2^{-12} = 2^{2+5+3-12} = 2^2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$B = (-3)^2 \times (3^2)^4 \times (3^{-5})^3 \times 3^4 = 3^2 \times (3^2)^4 \times (3^{-5})^3 \times 3^4$$

$$B = 3^2 \times 3^{2 \times 4} \times 3^{-5 \times 3} \times 3^4 = 3^{2+8-15+4} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$C = 2^7 \times (2^5)^2 \times (2^{-5})^3 = 2^7 \times 2^{10} \times 2^{-15} = 2^{7+10-15} = 2^2 = 4$$

$$D = \frac{5 \times 3^{-2} \times 81}{15^2} \times \frac{81}{5^4} = \frac{5^1 \times 3^{-2} \times (3^4)^4}{(3 \times 5)^2 \times 5^4} = 5^1 \times 3^{-2} \times 3^4 \times 3^{-2} \times 5^{-2} \times 5^4 = 5^3 = 125$$

$$E = \frac{3^{-2} \times (9^2)^3 \times 8}{27 \times 81 \times (-3)^6} = \frac{3^{-2} \times 3^{12} \times 2^3}{3^3 \times 3^4 \times 3^6} = 3^{-2} \times 3^{12} \times 2^3 \times 3^{-3} \times 3^{-4} \times 3^{-6} = 3^0 = 1$$

حالة خاصة: قوى العدد 10:

$$10^0 = 1 \quad \text{و} \quad 10^1 = 10$$

$$10^{-2} = 0,01$$

$$10^{-1} = 0,1$$

$$\text{أمثلة:} \quad 10^n = \underbrace{1000 \dots 0}_n; n \in \mathbb{N}$$

$$(1) \text{ أحسب: } 10^{-3}, 11^{-2}$$

$$(2) \text{ أكتب على شكل قوة: } 100000 \text{ و } 0,0001 \text{ و } 0,002$$

$$\text{تمرين 7: أحسب وبسط: } A = \frac{(10^6)^4 \times 10^{-2}}{10^4 \times 10^6 \times 10^{-13}} \text{ و}$$

$$B = \frac{10^{-8} \times 10^9 \times 10^7 \times 10^{-4}}{10^{-2} \times 10^3 \times 10^5}$$

الجواب :

$$A = \frac{(10^6)^4 \times 10^{-2}}{10^4 \times 10^6 \times 10^{-13}} = 10^{24} \times 10^{-2} \times 10^{-4} \times 10^{-6} \times 10^{13} = 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$B = \frac{10^{-8} \times 10^9 \times 10^7 \times 10^{-4}}{10^{-2} \times 10^3 \times 10^5} = 10^{-8} \times 10^9 \times 10^7 \times 10^{-4} \times 10^2 \times 10^{-3} \times 10^{-5}$$

$$B = 10^{-8+9+7-4+2-3-5} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$$

(2) الكتابة العلمية:

كل عدد عشري x موجب يكتب على الشكل $x = a \times 10^p$ حيث p

ينتمي إلى $\mathbb{Z}$ و a عدد عشري بحيث $1 \leq a < 10$.

هذه الكتابة تسمى الكتابة العلمية.

ملحوظة: إذا كان x عددا سالبا فإن كتابته العلمية

$$x = -a \times 10^p \text{ هي}$$

مثال: المسافة بين الأرض و الشمس هي: 149597870 كلم،

تكتب $1,4959787 \times 10^8$ كلم.

تمرين 8: أجب بصحيح أو خطأ

• الكتابة العلمية للعدد : 149597870 كلم

هي $1,4959787 \times 10^8$ كلم.

• $3,25 \times 10^4$ هي كتابة علمية

• 15×10^3 هي كتابة علمية

• الكتابة العلمية للعدد : -17000000 هي $-1,7 \times 10^7$

الجواب: الكتابة العلمية تكون على الشكل $x = a \times 10^p$ أو

$$x = -a \times 10^p$$

حيث p ينتمي إلى $\mathbb{Z}$ و a عدد عشري بحيث $1 \leq a < 10$. ومنه

• $1,4959787 \times 10^8$ هي كتابة علمية صحيح

• $3,25 \times 10^4$ هي كتابة علمية صحيح

• 15×10^3 هي كتابة علمية خطأ

• $-1,7 \times 10^7$ هي كتابة علمية صحيح

تمرين 9: حدد الكتابة العلمية للأعداد التالية

$$368 \ 100 \text{ و } 0,001 \text{ و } 0,01 \text{ و } 45 \ 000 \ 0 \text{ و } 300 \ 000$$

$$0,0002 \text{ و } 25 \ 000 \ 000,000 \ 0$$

$$\text{الجواب: } 300000 = 3 \times 10^5 \text{ و } 450000 = 4,5 \times 10^5$$

$$\text{و } 368100000 = 3,681 \times 10^9 \text{ و } 0,001 = 10^{-3} \text{ و } 0,01 = 10^{-2}$$

$$\text{و } 25000000 = 2,5 \times 10^7 \text{ و } 0,0002 = 2 \times 10^{-4}$$

V. الجذور المربعة:

تعريف: ليكن x عددا حقيقيا موجبا. نسمي جذر مربع x , العدد

الحقيقي الموجب y .

$$\text{بحيث } y^2 = x \text{ و نكتب } \sqrt{x} = y.$$

$$\sqrt{x} = y \text{ يكافئ } x = y^2 \text{ و } y \geq 0.$$

$$\text{أمثلة: } \sqrt{9} = 3 \text{ و } \sqrt{81} = 9$$

خاصية: لكل a و b من $\mathbb{R}^+$ لدينا:

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a \quad \text{و} \quad (\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}; n \in \mathbb{N}^*$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}; b > 0$$

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad \text{و} \quad \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}; a > 0$$

إذا كان $x \geq 0$ و $y \geq 0$ فان $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ يكافئ $x = y$.

$$\sqrt{x} = 0 \text{ إذا و فقط إذا كان } x = 0.$$

أمثلة: بسط و أحسب

$$D = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{14}} \quad C = \sqrt{\frac{9}{2}} \quad B = \sqrt{8} \quad A = \sqrt{16}$$

$$E = 3\sqrt{20} + 4\sqrt{45} - 2\sqrt{80} - \sqrt{180}$$

$$\text{و } G = (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 \quad F = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} - \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$$

$$H = [(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})]^2$$

$$M = (200520052006)^2 - (200520052005 \times 200520052007)$$

عندما تعجز الآلة الحاسبة

$$\text{الجواب: } B = \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 4} = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{2} \text{ و } A = \sqrt{16} = 4$$

$$E = 6\sqrt{8} + \sqrt{32} - 2\sqrt{98} = 6\sqrt{4 \times 2} + \sqrt{16 \times 2} - 2\sqrt{49 \times 2}$$

$$E = 12\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 14\sqrt{2}$$

$$E = 2\sqrt{2}$$

$$F = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}} + \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}} = \frac{(5\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{7}) + (-5\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt{7})}{(\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{2}-\sqrt{7})}$$

$$F = \frac{5\sqrt{7}\sqrt{2} + 5\sqrt{7}\sqrt{7} + 5\sqrt{2}\sqrt{2} - 5\sqrt{2}\sqrt{7}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{7})^2} = \frac{35 + 10}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{7})^2} = \frac{45}{-5} = -9$$

$$G = (\sqrt{3} + \sqrt{11})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{11})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{11} + (\sqrt{11})^2 - ((\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{11} + (\sqrt{11})^2)$$

$$G = 3 + 2\sqrt{33} + 11 - (3 - 2\sqrt{33} + 11) = 3 + 2\sqrt{33} + 11 - 3 + 2\sqrt{33} - 11 = 4\sqrt{33}$$

$$H = [(\sqrt{2} - \sqrt{7})(\sqrt{2} + \sqrt{7})]^2 = [(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{7})^2]^2$$

$$H = [2 - 7]^2 = (-5)^2 = 25$$

$$M = ((4\sqrt{3} - 7)(4\sqrt{3} + 7))^{2015} = ((4\sqrt{3})^2 - (7)^2)^{2015} = (48 - 49)^{2015} = (-1)^{2015} = -1$$

$$N = (\sqrt{75} - \sqrt{98}) \times (5\sqrt{3} + 7\sqrt{2}) = (\sqrt{25 \times 3} - \sqrt{49 \times 2}) \times (5\sqrt{3} + 7\sqrt{2})$$

$$N = (5\sqrt{3} - 7\sqrt{2}) \times (5\sqrt{3} + 7\sqrt{2}) = (5\sqrt{3})^2 - (7\sqrt{2})^2$$

$$N = 75 - 98 = 75 - 98 = -23$$

$$P = (5x + 2)^3 = (5x)^3 + 3(5x)^2 \times 2 + 3 \times 5x \times (2)^2 + (2)^3$$

$$P = 125x^3 + 150x^2 + 60x + 8$$

$$Q = (\sqrt{3} + 1)^3 = (\sqrt{3})^3 + 3(\sqrt{3})^2 \times 1 + 3 \times \sqrt{3} \times (1)^2 + (1)^3$$

$$Q = 3\sqrt{3} + 9 + 3 \times \sqrt{3} + 1 = 6\sqrt{3} + 10$$

$$G = (2015200052004)^2 - (2015200052002 \times 2015200052006)$$

نلاحظ أن الأعداد الثلاثة تختلف فقط في رقم وحداتها

لتبسيط الحساب نضع: $x = 2015200052004$

إذن: $x + 2 = 2015200052006$ و $x - 2 = 2015200052002$

و منه: $G = x^2 - (x - 2)(x + 2)$

$$G = x^2 - (x^2 - 4) = x^2 - x^2 + 4 = 4$$

VI. التناسبية

تعريف: a و b و c و d أعداد حقيقية بحيث $bd \neq 0$

نقول إن الأعداد a و b و c و d تكون في هذا الترتيب تناسبا إذا

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

و فقط إذا كان :

مثال: حدد العدد الحقيقي x إذا علمت أن الأعداد: $x + 1$ و 3 و x

تكون في هذا الترتيب تناسبا

الجواب: $x + 1$ و 3 و x تكون في هذا الترتيب تناسبا

$$2(x + 1) = 3x \quad \text{يعني} \quad \frac{x + 1}{3} = \frac{x}{2}$$

$$x = 2 \quad \text{يعني} \quad -x = -2 \quad \text{يعني} \quad 2x + 2 = 3x$$

$$C = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$D = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{28}{14}} = \sqrt{2}$$

$$E = 3\sqrt{20} + 4\sqrt{45} - 2\sqrt{80} - \sqrt{180} = 3\sqrt{4 \times 5} + 4\sqrt{9 \times 5} - 2\sqrt{16 \times 5} - \sqrt{36 \times 5}$$

$$E = 3 \times 2\sqrt{5} + 4 \times 3\sqrt{5} - 2 \times 4\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 6\sqrt{5} + 12\sqrt{5} - 8\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = (6 + 12 - 8 - 6)\sqrt{5}$$

$$E = 4\sqrt{5}$$

$$F = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} - \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5}) - (\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})}$$

$$F = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{5})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 - ((\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2)}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2}$$

$$F = \frac{3 + 2\sqrt{15} + 5 - (3 - 2\sqrt{15} + 5)}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{3 + 2\sqrt{15} + 5 - 3 + 2\sqrt{15} - 5}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{4\sqrt{15}}{-2} = -2\sqrt{15}$$

$$G = (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - ((\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2)$$

$$G = 5 + 2\sqrt{10} + 2 - (5 - 2\sqrt{10} + 2) = 5 + 2\sqrt{10} + 2 - 5 + 2\sqrt{10} - 2 = 4\sqrt{10}$$

$$H = [(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})]^2 = ((\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2)^2 = (2 - 3)^2 = (-1)^2 = 1$$

حساب: $M = (200520052006)^2 - (200520052005 \times 200520052007)$

نلاحظ أن الأعداد الثلاثة تختلف فقط في رقم وحداتها لتبسيط الحساب

نضع: $x = 200520052006$

إذن: $200520052007 = x + 1$ و $200520052005 = x - 1$

و منه: $M = x^2 - (x - 1)(x + 1)$

$$M = x^2 - (x^2 - 1) = x^2 - x^2 + 1 = 1$$

تمرين 10: بسط و أحسب

$$D = \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}} \quad C = \sqrt{\frac{16}{3}} \quad B = \sqrt{50} \quad A = \sqrt{121}$$

$$E = 6\sqrt{8} + \sqrt{32} - 2\sqrt{98}$$

$$G = (\sqrt{7} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{7} - \sqrt{2})^2 \quad F = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2} - \sqrt{7}} + \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{7}}$$

$$H = [(\sqrt{2} - \sqrt{7})(\sqrt{2} + \sqrt{7})]^2$$

$$M = (4\sqrt{3} - 7)^{2015} \times (4\sqrt{3} + 7)^{2015} \quad G = (\sqrt{3} + \sqrt{11})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{11})^2$$

$$Q = (\sqrt{3} + 1)^3 \quad P = (5x + 2)^3 \quad N = (\sqrt{75} - \sqrt{98}) \times (5\sqrt{3} + 7\sqrt{2})$$

$$G = (2015200052004)^2 - (2015200052002 \times 2015200052006)$$

الجواب:

$$B = \sqrt{50} = \sqrt{2 \times 25} = \sqrt{2} \times \sqrt{25} = 5\sqrt{2} \quad \text{و} \quad A = \sqrt{121} = 11$$

$$C = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$D = \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{60}{15}} = \sqrt{4} = 2$$