

Chapitre 8: Géométrie dans l'espace

I - Orthogonalité d'une droite et d'un plan:

1) Définition:

On dit qu'une droite (D) est perpendiculaire ou orthogonale à un plan (P) en un point A si elle est perpendiculaire au point A à deux droites incluses dans le plan (P) et sécantes en A .

* Figure géométrique

* On a

$(D) \perp (\Delta)$ et $(D) \perp (\Delta')$
au point A

* (Δ) et (Δ') sont inclus dans (P)
alors $(D) \perp (P)$

* Exemple:

ABCDEFGH un cube

Montrons que $(AE) \perp (EFGH)$

On a ABFE et ADHF deux carrés

donc * $(AE) \perp (EH)$ en E

* $(AE) \perp (EF)$ en E

* (EF) et (EH) sont inclus dans le plan $(EFGH)$ et se coupent en E

Alors d'après la définition $(AE) \perp (EFGH)$
en E

2) Propriété 1:

a - Propriété 1:

Si une droite (D) est orthogonale à un plan (P) au point A , alors elle est perpendiculaire à toutes les droites de (P) qui passent par A .

b - Exemple:

On considère le cube ABCDEFGH précédent

Montrons que le triangle AEG est rectangle en E.

On a $(AE) \perp (EFGH)$ en E

Comme la droite (EG) incluse dans le plan $(EFGH)$ et passe par E

Donc d'après la prop 1: $(AE) \perp (EG)$

Cela signifie que le triangle AEG est rectangle en E

3) Théorème de Pythagore dans l'espace:

a - Théorème de Pythagore direct:

* Exemple:

La figure représente un pyramide régulière SABCD

à base carrée ABCD

et de hauteur $[SH]$ telle:

$AC = BD = 12 \text{ cm}$ et $SH = 12 \text{ cm}$

Calculer BC et SC

⇒ Calcul de BC:

ABCD est un carré donc le triangle ABC est rectangle en B

Donc d'après le théorème de Pythagore direct on a: $BC^2 + AB^2 = AC^2$

$BC^2 + BC^2 = AC^2$ (car $AB = BC$)
ABCD carré

$2BC^2 = AC^2$

$2 \times BC^2 = 12^2$

$BC^2 = \frac{144}{2} = 72$

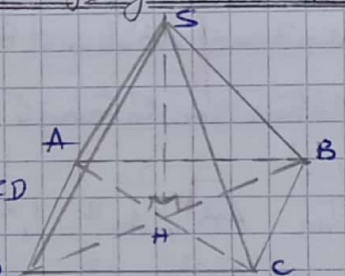
$BC = \sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2}$

⇒ Calcul de SC:

On a $[SH]$ hauteur de la pyramide SABCD

Donc $(SH) \perp (ABCD)$ en H

Or $(HC) \subset (ABCD)$



Alors: $(SH) \perp (HC)$

donc le triangle SHC est rectangle en H
donc d'après le théorème de Pythagore direct:

$$SH^2 + HC^2 = SC^2$$

$$SC^2 = 12^2 + 6^2 \text{ car } HC = \frac{AC}{2}$$

$$SC^2 = 144 + 36$$

$$SC^2 = 180$$

$$SC = \sqrt{180} = \sqrt{6^2 \times 5}$$

Alors $SC = 6\sqrt{5}$

b. Théorème de Pythagore réciproque:

* Exemple:

SABC tétraèdre
à base le triangle ABC

tel que:

$$AC = 3 \text{ cm et } AB = 4 \text{ cm et } BC = 5 \text{ cm}$$

Montrons que le triangle ABC est rectangle en A

$$\text{On a } AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

$$BC^2 = 5^2 = 25$$

$$\text{Donc } AB^2 + AC^2 = BC^2$$

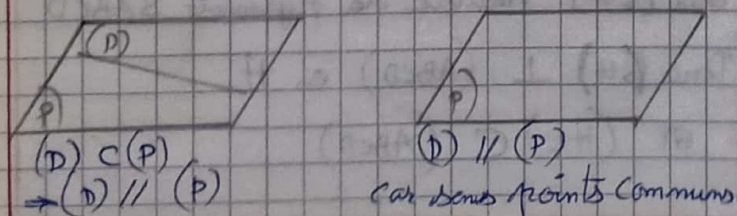
Alors d'après le théorème de Pythagore réciproque, le triangle ABC est rectangle en A.

II - Parallélisme d'une droite et d'un plan:

1) Définition:

On dit qu'une droite (D) est parallèle à un plan (P) si (D) est incluse dans (P) ou si (D) et (P) n'ont aucun point commun.

* Figure géométrique:



2) Propriété (2):

a - Propo (2):

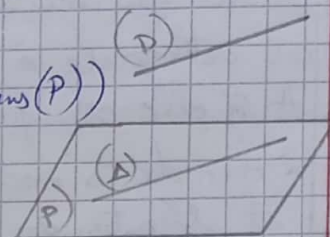
Une droite (D) est parallèle à un plan (P) si elle est parallèle à une droite (Δ) incluse dans le plan (P).

* Exemple:

* $(\Delta) \subset (P)$ (Δ inclus dans (P))

* $(\Delta) \parallel (D)$

alors $(D) \parallel (P)$

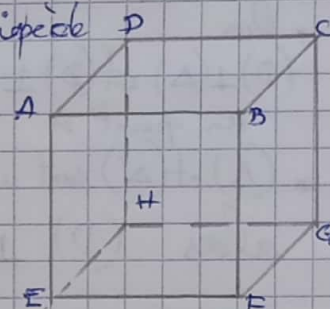


b. Exemple:

ABCDEFGH parallèlepipède

Montrons que:

$(AB) \parallel (EFGH)$



On a ABEF rectangle

donc $(AB) \parallel (EF)$

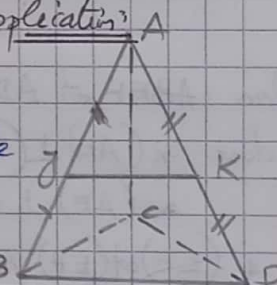
et $(EF) \subset (EFGH)$

Donc d'après la propo (2): $(AB) \parallel (EFGH)$

c. Exercice d'application:

ABCD tétraèdre

J milieu de [AB], K milieu de [AD]



Montrons que: $(JK) \parallel (BCD)$

* Correction:

On considère le triangle ABD

* J milieu de [AB]

On a * K milieu de [AD]

Donc d'après la propo de la droite passant par deux milieux

donc $(JK) \parallel (BD)$

comme $(BD) \subset (BCD)$

donc d'après la propo (2), on a:

$(JK) \parallel (BCD)$

3) Théorème de Thalès dans l'espace.

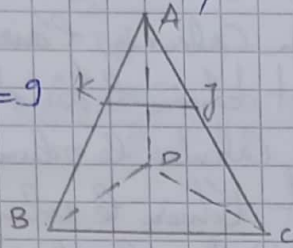
a - proportion directe :

* Exemple :

On considère le pyramide ABCD tel que :
(KJ) // (BC)

et AK = 2 et AB = 6 et BC = 9

Calculer KJ



On considère le triangle ABC

On a { * K ∈ [AB] tel que : (KJ) // (BC)
* J ∈ [AD]

Donc d'après le théorème de Thalès direct,

$$\text{on a : } \frac{AK}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{KJ}{BC}$$

$$\frac{AK}{AB} = \frac{KJ}{BC}$$

$$\frac{2}{6} = \frac{KJ}{9}$$

$$KJ = \frac{2 \times 9}{6} = \frac{18}{6}$$

Alors : KJ = 3

b - proportion réciproque :

On considère la figure

tel que : AF = 3 et AB = 9

AG = 4 et AC = 12

Montrer que (FG) // (BC)

$$\text{On a : } \frac{AF}{AB} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \text{ et } \frac{AG}{AC} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\text{donc } \frac{AF}{AB} = \frac{AG}{AC}$$

On considère le triangle ABC

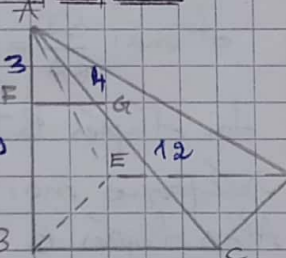
On a { * F ∈ [AB] et le points A, F et B ont

{ * G ∈ [AC] même ordre que les points A, G et C

$$\text{et on a } \frac{AF}{AB} = \frac{AG}{AC}$$

Donc d'après le théorème de Thalès

réciproque on a (FG) // (BC)



III - Agrandissement et réduction :

1) Définition :

On dit qu'une figure est un agrandissement ou une réduction d'une autre figure lorsque leurs longueurs sont proportionnelles de rapport k.

C'est on obtient le deuxième solide en multipliant les arêtes du premier par le nombre positif non nul k (k ≠ 1)

k est appelé coefficient d'agrandissement ou de réduction.

2) Remarques importantes

- * Si k > 1, il s'agit d'un agrandissement
- * Si 0 < k < 1, il s'agit d'une réduction.
- * Si k est le coefficient d'agrandissement alors le rapport de réduction est $\frac{1}{k}$

3) L'influence de l'agrandissement

ou la réduction sur les aires et les volumes :

a - proportion :

Dans un agrandissement ou une réduction dans l'espace de rapport k :

- Les longueurs sont multipliées par k
- Les aires sont multipliées par k²
- Les volumes sont multipliés par k³

Autrement dit

ℓ : longueur A : aire V : volume

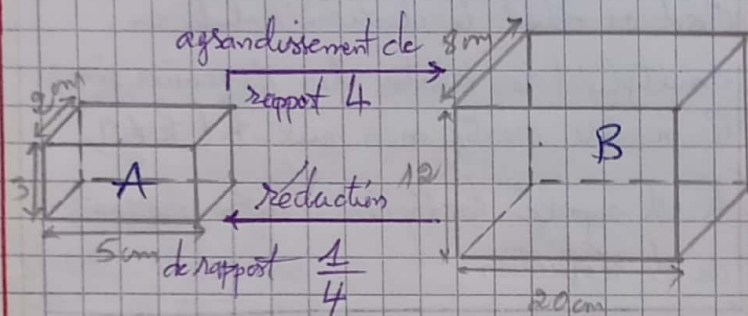
solide d'origine → Agrandissement ou réduction de rapport k → solide obtenu

ℓ	ℓ' = k × ℓ	ℓ'
A	A' = k ² × A	A'
V	V' = k ³ × V	V'

b-Exercice 6

Le parallélépipède B est agrandissement du parallélépipède A de rapport d'agrandissement est 4 (car les longueurs sont multipliées par 4)

et A est réduction de B de rapport $\frac{1}{4}$



* L'aire de A est:

$$A = 2(ab + ac + bc) = 2(5 \times 3 + 5 \times 2 + 3 \times 2) = 2 \times 31 = 62 \text{ cm}^2$$

Alors l'aire de B est:

$$A' = k^2 \times A = 4^2 \times 62 = 992 \text{ cm}^2$$

* Le volume de A est:

$$V = a \times b \times c = 5 \times 3 \times 2 = 30 \text{ cm}^3$$

donc le volume de B est:

$$V' = k^3 \times V = 4^3 \times 30 = 1920 \text{ cm}^3$$

* Remarque:

De plus, pour déterminer le rapport d'agrandissement ou de réduction, on emploie le théorème de Thalès direct.

4) Exercice d'application

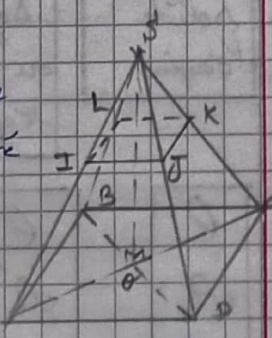
La figure ci-dessous représente une pyramide régulière à base carrée ABCD et de hauteur [SO] telle que:

BC = 6cm et SO = 4cm

I, J, K et L sont respectivement

les milieux de [SA], [SB], [SC] et [SD] tel que:

$$SI = SJ = SK = SL = \frac{1}{3} SA$$



1) Montrer que: $IJ = 2 \text{ cm}$

2) Sachant que la pyramide SABCD est un agrandissement du pyramide SIJKL

a- Déterminer son coefficient

b- Calculer l'aire du carré ABCD et déduire l'aire du carré IJKL

3) Calculer le volume du pyramide SABCD et déduire le volume du pyramide SIJKL

4) Déduire le volume V du solide ABCDIJKL

* Correction:

1) On a: $\frac{SI}{SA} = \frac{1}{3}$ donc $\frac{SI}{SA} = \frac{1}{3}$

et on a $\frac{SJ}{SD} = \frac{1}{3}$ car $SA = SD$

donc $\frac{SI}{SD} = \frac{1}{3}$ car SABCD pyramide régulier

Alors $\frac{SI}{SA} = \frac{SJ}{SD} = \frac{1}{3}$

On considère le triangle ASD

On a: * $I \in [AS]$ et les points A, I et S ont

* $J \in [DS]$ le même ordre des points D, J et S

et on a: $\frac{SI}{SA} = \frac{SJ}{SD}$

donc d'après le théorème de Thalès

réciroque on a: $(IJ) \parallel (AD)$

Alors d'après le théorème de Thalès direct

On a: $\frac{SI}{SA} = \frac{SJ}{SD} = \frac{IJ}{AD} = \frac{1}{3}$

donc $\frac{IJ}{AD} = \frac{1}{3}$ car $\frac{IJ}{AD} = \frac{1}{3}$

$IJ = \frac{1}{3} \times 6$ ($AD = BC = 6 \text{ cm}$)

donc: $IJ = 2 \text{ cm}$

2) a- On a la pyramide SABCD est un agrandissement du pyramide SIJKL

donc la base ABCD est un

agrandissement de la base IJKL

donc le coefficient d'agrandissement:

$k = \frac{AD}{IJ} = \frac{6}{2} = 3$

b- L'aire du carré ABCD est :

$$A = AB^2 = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$$

et on a le carré IJKL est réduction du carré ABCD de rapport $\frac{1}{3}$

donc l'aire du carré IJKL :

$$A' = k^2 \times A = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 36 = \frac{36}{9}$$

$$A' = 4 \text{ cm}^2$$

3) Le volume du pyramide SABCD est :

$$V = \frac{1}{3} \times SO \times AB^2 = \frac{1}{3} \times 4 \times 6^2 = 48 \text{ cm}^3$$

Le pyramide SIJKL est réduction du pyramide SABCD de rapport $\frac{1}{3}$

donc le volume de SIJKL est :

$$V' = k^3 \times V = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 48 = \frac{16}{9} \text{ cm}^3$$

4) V volume du solide ABCDIJKLI

$$\text{On a } V_{\text{SABCD}} = V + V_{\text{SIJKL}}$$

$$V = V_{\text{SABCD}} - V_{\text{SIJKL}} = 48 - \frac{16}{9} = \frac{432 - 16}{9} = \frac{416}{9}$$

$$V = \frac{416}{9} \text{ cm}^3$$