SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS

I- Système de deux équations du premier degré à deux inconnues :

*** Définition :** Un *système de deux équations* du premier degré à *deux inconnues* x et y est de la forme :

$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$, où a, b, c, a', b' et c' désignent des nombres donnés.

Un couple (x, y) est *solution d'un système* s'il vérifie simultanément les deux égalités.

*** Exemple 1 :** $\begin{cases} 4x+3y=0 \\ x-2y=3 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues.

*** Exemple 2 :** Le couple $(3,1)$ est-il solution du système $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x+y=4 \end{cases}$?

Pour $x=3$ et $y=1$: $\begin{cases} 2\times 3-1=6-1=5 \\ 3+1=4 \end{cases}$

Les deux égalités sont simultanément vérifiées pour : $x=3$ et $y=1$.

Donc le couple $(3,1)$ est solution du système $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x+y=4 \end{cases}$

II- Résolution du système :

*** Définition :** Résoudre un système de deux équations à deux inconnues revient à déterminer tous les couples de nombres (x, y) qui vérifient simultanément les deux équations.

1) Résoudre algébriquement un système :

a/ Résolution par substitution :

Cette méthode consiste à exprimer l'un des inconnues en fonction de l'autre dans l'une des équations et le substituer dans l'autre équation pour trouver une équation de premier degré d'une inconnue.

*** Exemple :** Résous le système $\begin{cases} -3x+y=9 \\ 4x-3y=-17 \end{cases}$ par substitution.

➔ On a : $\begin{cases} -3x+y=9 \\ 4x-3y=-17 \end{cases}$ alors : $\begin{cases} y=9+3x \\ 4x-3y=-17 \end{cases}$

On remplace y par sa valeur dans l'équation (2) :

$\begin{cases} y=9+3x \\ 4x-3\times(9+3x)=-17 \end{cases}$, donc : $\begin{cases} y=9+3x \\ 4x-27-9x=-17 \end{cases}$

d'où : $\begin{cases} y=9+3x \\ 4x-9x=-17+27 \end{cases}$, donc : $\begin{cases} y=9+3x \\ -5x=10 \end{cases}$, Alors : $\begin{cases} y=9+3x \\ x=\frac{10}{-5}=-2 \end{cases}$

Enfin : $\begin{cases} y=9+3\times(-2)=9-6=3 \\ x=-2 \end{cases}$

Donc le couple $(-2,3)$ est la solution de ce système.

b/ Résolution par combinaison linéaire :

Cette méthode consiste à multiplier les membres de chaque équation pour obtenir des coefficients opposés de l'une des inconnues, puis on ajoute membre à membre les deux équations du système pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

*** Exemple :** Résous le système $\begin{cases} 5x-4y=8 \\ 2x+5y=1 \end{cases}$ par combinaison linéaire.

➔ On cherche à éliminer l'inconnue $\boldsymbol{x}$ pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

* On multiplie les deux membres de la première équation par **2** et ceux de la deuxième par **(-5)**.

$\begin{cases} 2\times(5x-4y)=2\times 8 \\ -5\times(2x+5y)=-5\times 1 \end{cases}$ on obtient : $\begin{cases} 10x-8y=16 \\ -10x-25y=-5 \end{cases}$

* On ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer $\boldsymbol{x}$.

$10x+(-10x)-8y+(-25y)=16+(-5)$

* On résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de $\boldsymbol{y}$.

$10x-10x-8y-25y=16-5$

c'est-à-dire : $-33y=11$ donc : $y=\frac{11}{-33}$ signifie que : $\boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{-1}}{\boldsymbol{3}}$.

* On remplace $\boldsymbol{y}$ par $\frac{-1}{3}$ dans l'une des deux équations pour trouver $\boldsymbol{x}$.

Ici on choisit la 2ème équation et on trouve : $2x+5\times\left(\frac{-1}{3}\right)=1$

c'est-à-dire : $2x-\frac{5}{3}=1$

$2x=1+\frac{5}{3}$ ➔ $2x=\frac{3}{3}+\frac{5}{3}$ ➔ $2x=\frac{8}{3}$ ➔ $x=\frac{8}{3}\div 2$ ➔ $x=\frac{8}{3}\times\frac{1}{2}$ ➔ $x=\frac{8}{6}$

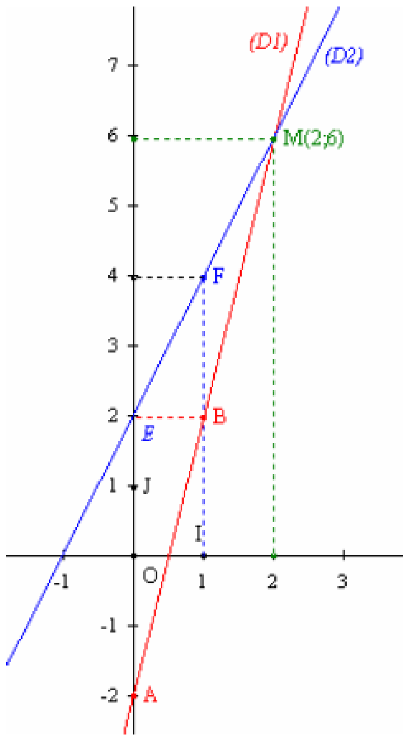
Donc : $\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{3}}$.

Alors le couple $(\frac{-1}{3},\frac{4}{3})$ est la solution de ce système.

2) Résoudre graphiquement un système :

Cette méthode consiste à relier chaque équation à une droite, puis on représente chacune des droites dans un même repère orthonormé.

La solution, si elle existe, est donnée par les coordonnées du point d'intersection des deux droites.



* Exemple : Résous graphiquement le système $\begin{cases} 4x-y=2 \\ 2x-y=-2 \end{cases}$

➔ Pour chaque équation on exprime y en fonction de x, et on obtient :

$\begin{cases} -y=-4x+2 \\ -y=-2x-2 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} y=4x-2 \\ y=2x+2 \end{cases}$

Dans un repère on trace les deux droites (D_1) d'équation : $y=4x-2$, et (D_2) d'équation : $y=2x+2$.

- Pour (D_1) : $\begin{cases} x_A=0 \implies y_A=4x_A-2=4\times 0-2=0-2=-2 \\ x_B=1 \implies y_B=4x_B-2=4\times 1-2=4-2=2 \end{cases}$

- Pour (D_2) : $\begin{cases} x_E=0 \implies y_E=2x_E+2=\times 0+2=0+2=2 \\ x_F=1 \implies y_F=2x_F+2=2\times 1+2=2+2=4 \end{cases}$

Dans un repère orthonormé, on trace les deux droites $(D_1)\ et\ (D_2)$.

* Les deux droites $(D_1)\ et\ (D_2)$ se coupent en un point : $M(2{,}6)$.

➔ Alors le couple $(2{,}6)$ est la solution de ce système.

> **_* Remarque :_** - Si les deux droites _ont le même coefficient directeur_, alors _le système n'a pas de solution_.
>
> - Si les deux droites ont _le même coefficient directeur et le même ordonné à l'origine_, alors _le système a plusieurs solutions_.

III- Résolution d'un problème avec un système :

*** Règle :** Les étapes pour résoudre un problème :

- Choisir les inconnues.
- Mise en système d'équations.
- Résoudre le système.
- Vérification (vérifier que le couple trouvé est solution de problème).
- Conclusion.

*** Exemple :** Un musée propose un tarif pour les adultes à 70 DH et un tarif pour les enfants à 45 DH. Lors d'une journée, ce musée a reçu la visite de 205 personnes et la recette totale a été de 12225 DH.
Retrouve le nombre d'adultes et le nombre d'enfants ayant visité le musée lors de cette journée.

➔ * *Choix des inconnues* : Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants.

* *Mise en système d'équation* :

- 205 personnes ont visité le musée donc : $x + y = 205$
- La recette a été de 12225 DH alors : $70x + 45y = 12225$

* *Résoudre le système :* On résout le système par la méthode de substitution.

$\begin{cases} x + y = 205 \\ 70x + 45y = 12225 \end{cases}$, c'est-à-dire : $\begin{cases} x = 205 - y \\ 70x + 45y = 12225 \end{cases}$

Signifie : $\begin{cases} x = 205 - y \\ 70(205 - y) + 45y = 12225 \end{cases}$, donc : $\begin{cases} x = 205 - y \\ 14350 - 70y + 45y = 12225 \end{cases}$

Signifie : $\begin{cases} x = 205 - y \\ -70y + 45y = 12225 - 14350 \end{cases}$, alors : $\begin{cases} x = 205 - y \\ -25y = -2125 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x = 205 - y \\ y = \frac{-2125}{-25} = 85 \end{cases}$, alors : $\begin{cases} x = 205 - 85 = 120 \\ y = 85 \end{cases}$

* *Vérification :* On a : $\begin{cases} 120 + 85 = 205 \\ 70 \times 120 + 45 \times 85 = 8400 + 3825 = 12225 \end{cases}$

* *Conclusion :* Alors le nombre d'adultes est 120, et le nombre d'enfants est 85.

EXERCICES

Exercice 1: Le couple $(5,1)$ est-il solution du système : $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ -3x + 8y = -7 \end{cases}$?

➔ Pour $x = 5$ et $y = 1$: $\begin{cases} 5 + 2 \times 1 = 5 + 2 = 7 \\ -3 \times 5 + 8 \times 1 = -15 + 8 = -7 \end{cases}$

Les deux égalités sont simultanément vérifiées pour : $x = 5$ et $y = 1$.

Donc le couple $(5,1)$ est solution du système $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ -3x + 8y = -7 \end{cases}$

****

Exercice 2 : Résous par la méthode de substitution les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - 7y = 12 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases}$

➔ *1)* $\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x-7y=12 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} x=2y \\ 2x-7y=12 \end{cases}$ signifie : $\begin{cases} x=2y \\ 2\times 2y-7y=12 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} x=2y \\ 4y-7y=12 \end{cases}$

c'est-à-dire : $\begin{cases} x=2y \\ -3y=12 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} x=2y \\ y=\frac{12}{-3}=-4 \end{cases}$ alors : $\begin{cases} x=2\times(-4)=-8 \\ y=-4 \end{cases}$

Alors le couple $(-8,-4)$ est la solution de ce système.

2) $\begin{cases} 2x-y=2 \\ x+y=1 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} 2x-y=2 \\ x=1-y \end{cases}$ signifie : $\begin{cases} 2(1-y)-y=2 \\ x=1-y \end{cases}$ donc : $\begin{cases} 2-2y-y=2 \\ x=1-y \end{cases}$

c'est-à-dire : $\begin{cases} -2y-y=2-2 \\ x=1-y \end{cases}$ donc : $\begin{cases} -3y=0 \\ x=1-y \end{cases}$ alors : $\begin{cases} y=\frac{0}{-3}=0 \\ x=1-y \end{cases}$ enfin : $\begin{cases} y=0 \\ x=1-0=1 \end{cases}$

Alors le couple $(1,0)$ est la solution de ce système.

3) $\begin{cases} x-3y=2 \\ 2x-6y=4 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} x=2+3y \\ 2x-6y=4 \end{cases}$ signifie : $\begin{cases} x=2+3y \\ 2(2+3y)-6y=4 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} x=2+3y \\ 4+6y-6y=4 \end{cases}$

c'est-à-dire : $\begin{cases} x=2+3y \\ 6y-6y=4-4 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} x=2+3y \\ 0y=0 \end{cases}$

Puisqu'on a : $0y=0$ dans l'équation (2).

Alors tous les nombres réels sont des solutions de ce système.

****

Exercice 3 : Résous par la méthode de la combinaison linéaire les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ -6x+3y=3 \end{cases}$; *2)* $\begin{cases} 12x+14y=2 \\ 2x+4y=2 \end{cases}$; *3)* $\begin{cases} 9x-7y=8 \\ -2x+7y=2 \end{cases}$

➔ *1)* $\begin{cases} 2x-y=3 \\ -6x+3y=3 \end{cases}$ On multiplie les deux membres de la première équation par **3**, puis on ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer $\boldsymbol{x}$.

$\begin{cases} 3\times(2x-y)=3\times 3 \\ -6x+3y=3 \end{cases}$ signifie : $\begin{cases} 6x-3y=9 \\ -6x+3y=3 \end{cases}$ donc : $6x+(-6x)-3y+3y=9+3$

c'est-à-dire : $6x-6x-3y+3y=12$, donc : $0x+0y=12$, d'où : $0=12$.

Alors le système n'a pas de solutions.

2) $\begin{cases} 12x+14y=2 \\ 2x+4y=2 \end{cases}$ On multiplie les deux membres de la deuxième équation par **(-6)**, puis on ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer $\boldsymbol{x}$.

$\begin{cases} 12x+14y=2 \\ -6\times(2x+4y)=-6\times 2 \end{cases}$ signifie : $\begin{cases} 12x+14y=2 \\ -12x-24y=-12 \end{cases}$ donc : $12x+(-12x)+14y+(-24y)=2+(-12)$

c'est-à-dire : $12x-12x+14y-24y=2-12$

d'où : $-10y=-10$

donc : $y=\frac{-10}{-10}=1$

On remplace $\boldsymbol{y}$ par 1 dans la deuxième équation pour trouver $\boldsymbol{x}$.

➔ $2x+4\times 1=2$

signifie : $2x=2-4$

d'où : $2x=-2$

Enfin : $x=\frac{-2}{2}=-1$

Alors le couple (-1,1) est la solution de ce système.

3) $\begin{cases} 9x-7y=8 \\ -2x+7y=2 \end{cases}$ On ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer y.

On obtient : $9x+(-2x)-7y+7y=8+2$, signifie : $9x-2x=10$, d'où : $7x=10$, donc : $x=\frac{10}{7}$.

On remplace x par $\frac{10}{7}$ dans la deuxième équation pour trouver y.

➔ $-2\times\frac{10}{7}+7y=2$, signifie : $\frac{-20}{7}+7y=2$, c'est-à-dire : $7y=2+\frac{20}{7}$, d'où : $7y=\frac{14}{7}+\frac{20}{7}=\frac{34}{7}$

donc : $y=\frac{34}{7}\div 7$, signifie : $y=\frac{34}{7}\times\frac{1}{7}$, enfin : $y=\frac{34}{49}$.

Alors le couple $(\frac{10}{7},\frac{34}{49})$ est la solution de ce système.

****

Exercice 4 : Résous graphiquement les systèmes suivants :

1) $\begin{cases}-x+y+3=0\\2x-y-4=0\end{cases}$; *2)* $\begin{cases}3x+y-1=0\\6x+2y-2=0\end{cases}$; *3)* $\begin{cases}-3x-2y=-3\\6x+4y+1=0\end{cases}$

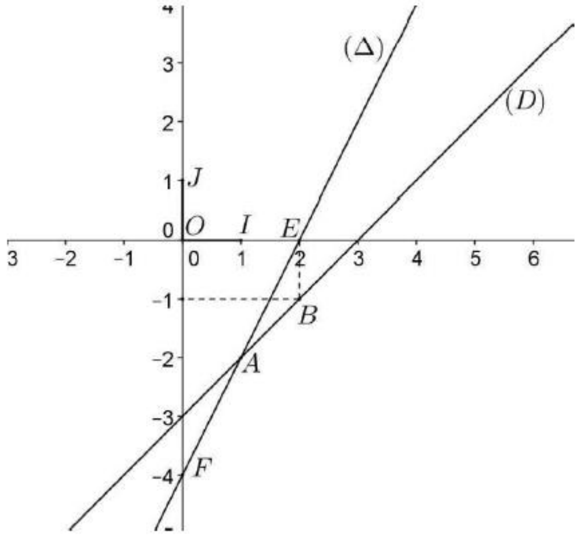
➔ *1)* $\begin{cases}-x+y+3=0\\2x-y-4=0\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}y=x-3\\-y=-2x+4\end{cases}$ signifie : $\begin{cases}y=x-3\\y=2x-4\end{cases}$

Dans un repère on trace les deux droites (D) d'équation : $y=x-3$,

et (Δ) d'équation : $y=2x-4$.

- Pour (D) : $\begin{cases}x_A=0 \Rightarrow y_A=x_A-3=0-3=-3\\x_B=1 \Rightarrow y_B=x_B-3=1-3=-2\end{cases}$

- Pour (Δ) : $\begin{cases}x_E=0 \Rightarrow y_E=2x_E-4=2\times0-4=0-4=-4\\x_F=1 \Rightarrow y_B=2x_B-4=2\times1-4=2-4=-2\end{cases}$



Dans un repère orthonormé, on trace les deux droites (D) *et* (Δ).

* Les deux droites (D) *et* (Δ) se coupent en un point : $A(1,-2)$.

Alors le couple $(1,-2)$ est la solution de ce système.

2) $\begin{cases}3x+y-1=0\\6x+2y-2=0\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}y=-3x+1\\2y=-6x+2\end{cases}$

signifie : $\begin{cases}y=-3x+1\\y=-\frac{6}{2}x+\frac{2}{2}\end{cases}$ signifie : $\begin{cases}y=-3x+1\\y=-3x+1\end{cases}$

On considère les droites (D) d'équation : $y=-3x+1$, et (Δ) d'équation : $y=-3x+1$.

On observe que les deux droites ont le même coefficient directeur et le même ordonné à l'origine.

Alors tous les nombres réels sont des solutions de ce système.

3) $\begin{cases}-3x-2y=-3\\6x+4y+1=0\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}-2y=3x-3\\4y=-6x-1\end{cases}$ signifie : $\begin{cases}y=\frac{-3}{2}x-\frac{3}{2}\\y=\frac{-6}{4}x-\frac{1}{4}\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}y=\frac{-3}{2}x-\frac{3}{2}\\y=\frac{-3}{2}x-\frac{1}{4}\end{cases}$

On considère les droites (D) d'équation : $y=\frac{-3}{2}x-\frac{3}{2}$, et (Δ) d'équation : $y=\frac{-3}{2}x-\frac{1}{4}$.

On observe que les deux droites ont le même coefficient directeur.

Alors le système n'a pas de solutions.

****

Exercice 5 : Pour classer des photos, un magasin propose deux types de rangement : des albums et des boîtes.

Loubna achète 6 boîtes et 5 albums et paie 610 DH.

Youssef achète 3 boîtes et 7 albums et paie 530 DH.

Quel est le prix d'une boîte ? et quel est le prix d'un album ?

➔ * *Choix des inconnues :* soit x le prix d'une boîte et y le prix d'un album.

* *Mise en système d'équation :* - Loubna achète 6 boîtes et 5 albums et paie 610 DH, donc : $6x+5y=610$.

- Youssef achète 3 boîtes et 7 albums et paie 530 DH, donc : $3x+7y=530$.

* *Résoudre le système :* On résout le système par la méthode de la combinaison linéaire.

$\begin{cases} 6x + 5y = 610 \\ 3x + 7y = 530 \end{cases}$ On multiplie les deux membres de la deuxième équation par **(-2)**.

On obtient : $\begin{cases} 6x + 5y = 610 \\ -2 \times (3x + 7y) = -2 \times 530 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} 6x + 5y = 610 \\ -6x - 14y = -1060 \end{cases}$

On ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer $\boldsymbol{x}$.

Donc : $6x + (-6x) + 5y + (-14y) = 610 + (-1060)$, c'est-à-dire : $6x - 6x + 5y - 14y = 610 - 1060$

Signifie : $-9y = -450$, donc : $y = \frac{-450}{-9} = 50$.

On remplace $\boldsymbol{y}$ par 50 dans la première équation pour trouver $\boldsymbol{x}$.

➔ $6x + 5 \times 50 = 610$, c'est-à-dire : $6x + 250 = 610$, d'où : $6x = 610 - 250$, donc : $6x = 360$, enfin : $x = \frac{360}{6} = 60$.

* *Vérification :* On a : $\begin{cases} 6 \times 60 + 5 \times 50 = 360 + 250 = 610 \\ 3 \times 60 + 7 \times 50 = 180 + 350 = 530 \end{cases}$

* *Conclusion :* Alors le prix d'une boîte est 60 DH, et le prix d'un album est 50 DH.

****

Exercice 6 : 1) Résous le système suivant : $\begin{cases} 3x + 2y = 53 \\ 4x + y = 49 \end{cases}$

2) Chez un marchand de fruits :

* Fatima a payé 53 DH pour l'achat de 3Kg de bananes et 2Kg de pommes.

* Bilal a payé 49 DH pour l'achat de 4Kg de bananes et 1Kg de pommes.

Détermine le prix d'un kilogramme de bananes et d'un kilogramme de pommes.

➔ 1) On résout le système par la méthode de substitution :

$\begin{cases} 3x + 2y = 53 \\ 4x + y = 49 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} 3x + 2y = 53 \\ y = 49 - 4x \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} 3x + 2(49 - 4x) = 53 \\ y = 49 - 4x \end{cases}$ donc : $\begin{cases} 3x + 98 - 8x = 53 \\ y = 49 - 4x \end{cases}$

c'est-à-dire : $\begin{cases} 3x - 8x = 53 - 98 \\ y = 49 - 4x \end{cases}$ donc : $\begin{cases} -5x = -45 \\ y = 49 - 4x \end{cases}$ alors : $\begin{cases} x = \frac{-45}{-5} \\ y = 49 - 4x \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} x = 9 \\ y = 49 - 4 \times 9 \end{cases}$

enfin : $\begin{cases} x = 9 \\ y = 49 - 36 = 13 \end{cases}$

Alors le couple $(9{,}13)$ est la solution de ce système.

2) * *Choix des inconnues :* soit x le prix d'un kilogramme de bananes et y le prix d'un kilogramme de pommes.

* *Mise en système d'équation :*

- Fatima a payé 53 DH pour l'achat de 3Kg de bananes et 2Kg de pommes, donc : $3x + 2y = 53$.
- Bilal a payé 49 DH pour l'achat de 4Kg de bananes et 1Kg de pommes, donc : $4x + y = 49$.

* *Résoudre le système :* On a : $\begin{cases} 3x + 2y = 53 \\ 4x + y = 49 \end{cases}$, d'après la question précédente on a : $x = 9 \; et \; y = 13$.

* *Vérification :* On a : $\begin{cases} 3 \times 9 + 2 \times 13 = 27 + 26 = 53 \\ 4 \times 9 + 13 = 36 + 13 = 49 \end{cases}$

* *Conclusion :* Alors le prix d'un kilogramme de bananes est 9 DH et le prix d'un kilogramme de pommes est 13 DH.