

Chapitre (4): Equation d'une droite

I - L'équation réduite d'une droite :

1) Définition :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, chaque droite admet une équation réduite de la forme: $y = mx + p$

- * m : est appelé le coefficient directeur (ou la pente) de la droite.

- * p : est appelé l'ordonnée à l'origine

2) Exemples :

a - Exemple (1) :

* (D): $y = 2x - 3$ est l'équation réduite de la droite (D) de pente $m = 2$ et d'ordonnée à l'origine $p = -3$

* (Δ): $y = -x$ est l'équation réduite de la droite (Δ) de pente $m = -1$ et d'ordonnée à l'origine $p = 0$

b - Exemple (2) :

On considère la droite (D) telle :

$$(D): 2y + 3x - 1 = 0$$

On a $2y + 3x - 1 = 0$ on isole y

$$2y = -3x + 1$$

$$y = \frac{-3x + 1}{2}$$

$$(D): y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

C'est l'équation réduite de la droite (D)

de pente $m = -\frac{3}{2}$ et l'ordonnée à l'origine $p = \frac{1}{2}$

c - Exemple (3): construction d'une

droite définie par son équation réduite :

On considère la droite (D): $y = -2x + 3$

pour construire la droite (D), il suffit de tracer deux points différents de cette droite.

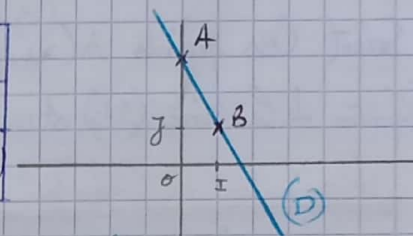
On prend par exemple:

$$x = 0 \text{ donc } y = -2 \times 0 + 3 = 3$$

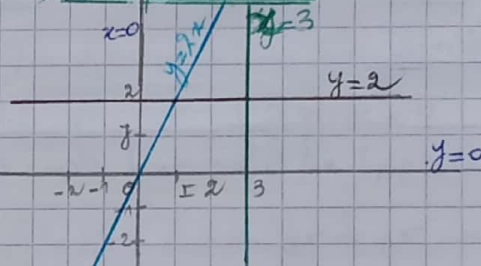
$$x = 1 \text{ donc } y = -2 \times 1 + 3 = -2 + 3 = 1$$

On considère le tableau suivant:

x	0	1
y	3	1
$M(x, y)$	A(0,3)	B(1,1)



3) Cas particuliers :



* L'équation de l'axe des abscisses est $y = 0$

* L'équation de l'axe des ordonnées est: $x = 0$

* L'équation de la droite parallèle à l'axe des abscisses (horizontale) et passant par le point $M(a, b)$ est: $y = b$

* L'équation de la droite parallèle à l'axe des ordonnées (verticale) et passant par le point $M(a, b)$ est: $x = a$

* L'équation de la droite passant par l'origine du repère s'écrit sous la forme $y = mx$ (l'ordonnée à l'origine est nulle)

4) Remarques importantes

1) Un point appartient à une droite si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite

Exemple: Soient (D): $y = 2x - 3$ et $A(2, 1)$

On a $2x_A - 3 = 2 \times 2 - 3 = 4 - 3 = 1 = y_A$

Alors $A \in (D)$

2) Soient les points $A(a, y_A)$ et $B(a, y_B)$

l'équation de la droite (AB) est: $x = a$

3) Soient les points $A(x_A, b)$ et $B(x_B, b)$

l'équation de la droite (AB) est: $y = b$

II - Détermination de l'équation d'une droite:

1) Pente d'une droite définie par deux points:

a - Propriété:

Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points
telque $x_A \neq x_B$

Donc la pente de la droite (AB) est:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Remarque: $m = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}$

En gardant l'ordre.

b - Exemples

On considère $A(-1; -3)$ et $B(-4; 0)$

La pente de la droite (AB) est:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - (-3)}{-4 - (-1)} = \frac{3}{-3} = -1$$

2) Détermination de l'équation réduite

d'une droite définie par deux points:

⇒ Déterminons l'équation réduite de la droite

(AB) telque: $A(1; -2)$ et $B(-2; 3)$

* L'équation réduite de la droite (AB) s'écrit

sous la forme: (AB): $y = mx + p$

On a $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - (-2)}{-2 - 1} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$

donc: (AB): $y = -\frac{5}{3}x + p$

* Détermination de p

On a $A \in (AB)$

donc: $y_A = -\frac{5}{3}x_A + p$

$$-2 = -\frac{5}{3} \times 1 + p$$

$$-2 = -\frac{5}{3} + p$$

$$p = -2 + \frac{5}{3} = \frac{-6 + 5}{3} = -\frac{1}{3}$$

Alors: (AB): $y = -\frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$

3) Détermination de l'équation réduite

d'une droite définie par sa pente et un point:

Déterminons l'équation réduite de la droite

(Δ) de pente 3 et qui passe par le point

$E(2; -1)$

* On a l'équation réduite de la droite (Δ)

s'écrit sous la forme: (Δ): $y = 3x + p$

* Détermination de p:

On a: $E \in (\Delta)$

donc: $y_E = 3x_E + p$

$$-1 = 3 \times 2 + p$$

$$-1 = 6 + p$$

$$p = -1 - 6 = -7$$

Alors l'équation réduite de la droite (Δ)

est: (Δ): $y = 3x - 7$

4) Exercice d'application:

Soient $A(1; 1)$ et $B(2; -1)$

Montrer que l'équation réduite de la droite

(AB) est: $y = -2x + 3$

⇒ Solution

Méthode ①: Vérification:

On a $-2x_A + 3 = -2 \times 1 + 3 = -2 + 3 = 1 = y_A$

$-2x_B + 3 = -2 \times 2 + 3 = -4 + 3 = -1 = y_B$

Donc les points A et B vérifient l'équation

$$y = -2x + 3$$

Alors: (AB): $y = -2x + 3$

* Méthode ②: Calcul:

$$\text{On a } (AB): y = mx + p$$

$$\text{On a: } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 1}{2 - 1} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\text{donc } (AB): y = -2x + p$$

$$\text{or } A \in (AB) \text{ donc } y_A = -2x_A + p$$

$$1 = -2 \times 1 + p$$

$$1 = -2 + p$$

$$p = 1 + 2 = 3$$

$$\text{Alors: } (AB): y = -2x + 3$$

III - Parallélisme et orthogonalité de deux droites:

1) Condition de parallélisme de deux droites:

a - Proposé ②:

Soient (D) et (Δ) deux droites telles que:

$$(D): y = mx + p \text{ et } (\Delta): y = m'x + p'$$

* (D) // (Δ) est équivalent à $m = m'$

Autrement dit: Deux droites sont parallèles si et seulement si ils ont la même pente.

b - Exemple:

On considère les deux droites:

$$(D_1): y = -2x + 1 \text{ et } (D_2): y = -2x + 5$$

On a: $(D_1) // (D_2)$ car ils ont même pente -2

c - Exercice d'application:

On considère la droite (D): $y = 2x - 1$

1) Est-ce que $A(-1; 2) \in (D)$

2) Déterminer l'équation réduite de la droite

(Δ) passant par A et parallèle à (D)

* Solution:

$$1) \text{ On a } 2x_A - 1 = 2 \times (-1) - 1 = -2 - 1 = -3 \neq 2$$

donc $A \notin (D)$

2) L'équation réduite de la droite (Δ) s'écrit

$$\text{sous la forme: } (\Delta): y = mx + p$$

puisque (D) // (Δ) donc $m = 2$

$$\text{Alors: } (\Delta): y = 2x + p$$

Déterminons p:

$$\text{On a } A \in (\Delta)$$

$$\text{donc } y_A = 2x_A + p$$

$$2 = 2 \times (-1) + p$$

$$2 = -2 + p$$

$$p = 2 + 2 = 4$$

$$\text{Alors: } (\Delta): y = 2x + 4$$

2) Condition d'orthogonalité de deux droites:

a - Proposé ③:

Soient (D) et (Δ) deux droites telles que:

$$(D): y = mx + p \text{ et } (\Delta): y = m'x + p'$$

* (D) $\perp$ (Δ) est équivalent à $m \times m' = -1$

Autrement dit: Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs pentes est égale à -1

b - Exemple:

On considère les deux droites:

$$(D): y = -\frac{2}{3}x + 1 \text{ et } (D'): 2y - 3x + 8 = 0$$

$$\text{On a } 2y - 3x + 8 = 0 \Rightarrow 2y = 3x - 8$$

$$\Rightarrow y = \frac{3x - 8}{2}$$

$$\text{Alors } (D'): y = \frac{3}{2}x - 4$$

$$\text{On a } \frac{3}{2} \times \frac{-2}{3} = -1$$

$$\text{Donc } (D) \perp (D')$$

C - Exercice d'application:

On considère la droite (D): $y = -4x + 3$

- 1) Montrer que $A(0; -1) \notin (D)$
- 2) Déterminer l'équation réduite de la droite (Δ) passant par le point A et perpendiculaire à (D)
- 3) On considère la droite (D'): $x - 4y - 1 = 0$
Montrer que: $(D) \perp (D')$

Solution:

1) On a $-4x_A + 3 = -4 \times 0 + 3 = 3 \neq -1$
donc $A \notin (D)$

2) L'équation réduite de la droite (Δ) s'écrit sous la forme: $(\Delta): y = mx + p$

On a $(\Delta) \perp (D)$

donc $m \times -4 = -1 \Rightarrow m = \frac{-1}{-4}$
 $\Rightarrow m = \frac{1}{4}$

Alors $y = \frac{1}{4}x + p$

Déterminons p:

On a $A \in (\Delta)$

donc $y_A = \frac{1}{4}x_A + p$

$-1 = \frac{1}{4} \times 0 + p$

$p = -1$

Alors: $(\Delta): y = \frac{1}{4}x - 1$

3) On a: $(D'): x - 4y - 1 = 0$

$\Rightarrow -4y = -x + 1$

$y = \frac{-x + 1}{-4} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$

donc: $(D'): y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$

on a: $-4 \times \frac{1}{4} = -1$ donc $(D) \perp (D')$