Remarque : Dans tout le cours, (O, I, J) est un repère orthogonal.

I-L'équation réduite d'une droite

1- Définition

- a et b deux nombres réels fixes.

L'ensemble des points M(x ; y) tels que : $y = ax + b$ est une droite.

L'équation $y = ax + b$ est appelé l'équation réduite d'une droite (d). on note (d) : $y = ax + b$

- Le réel a est appelé le coefficient directeur (ou la pente) de la droite (d).
- Le réel b est appelé l'ordonnée à l'origine.(ordonnée du point d'intersection de (d) et l'axe des ordonnées).

Exemples

- On considère la droite (d) d'équation : $y = 3x - 2$ alors 3 est le coefficient directeur de la droite (d) et -2 est l'ordonnée à l'origine.($y = 3x + (-2)$)
- On considère la droite (D) d'équation : $y = -x$ alors -1 est le coefficient directeur de la droite (D) et 0 est l'ordonnée à l'origine.($y = -1x + 0$)
- L'équation $y = 5x^2 + 3$, ce n'est pas une équation d'une droite.

Remarques

- Un point appartient à une droite si seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite.
- Soient (d) : $y = ax + b$ et si $A(x_A, y_A)$ appartient à (d) alors : $y_A = ax_A + b$.
- Pour tracer une droite il suffit de tracer deux points dont les coordonnées vérifient l'équation de cette droite.

Applications

1- Soit la droite (d) d'équation $y = \frac{5}{6}x - 2$. les points E(5 ;2) et F(-6 ;-7) appartient –ils à la droite (d)

Solution :

- on a $y_E = 2$ et $\frac{5}{6}x_E - 2 = \frac{5}{6} \times 5 - 2 = \frac{25}{6} - \frac{12}{6} = \frac{25-12}{6} = \frac{13}{6}$ .comme $y_E \neq \frac{5}{6}x_E - 2$ alors le point E n'appartient pas à la droite (d).
- On a $y_F = -7$ et $\frac{5}{6}x_F - 2 = \frac{5}{6} \times (-6) - 2 = -5 - 2 = -7$. Comme $y_E = \frac{5}{6}x_E - 2$ alors le point F appartient à la droite (d).

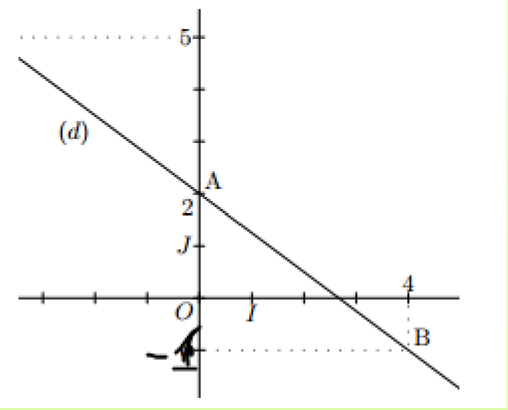
2- Tracer la droite (d) d'équation $y = \frac{-3}{4}x + 2$

Solution :

Soit A le point de (d) d'abscisse $x_A = 0$ alors y_A correspond à l'ordonnée à l'origine, d'où $y_A = 2$

Soit B le point de (d) d'abscisse $x_B = 4$ alors $y_B = \frac{-3}{4}x_B + 2 = \frac{-3}{4} \times 4 + 2 = -3 + 2 = -1$, d'où $y_B = -1$

Finalement la droite (d) passe par les deux points A(0 ;2) et B(4 ;-1)



propiété

- Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points tel que $x_A \neq x_B$ alors le coefficient directeur de la droite (AB) est :
- $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.(ou $a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$)

Exemple

- Soient A(1,3) et B(2,10) deux points dans le plant rapporté à une repère alors le coefficient directeur (la pente) de la droite (AB) est : $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{10-3}{2-1} = \frac{7}{1} = 7$.
- L'équation réduite de la droite (AB) s'écrit sous la forme $(AB): y = 7x + b$
- Pour déterminer b on sait que A(1,3) appartient à la droite (AB) alors $y_A = 7x_A + b$. on remplace y_A *par* 3 *et* x_A *par* 1 . *on trouve l'équation* $3 = 7 \times 1 + b$ d'où 3-7=b .finalement b = - 4

$(AB): y = 7x - 4$

- Remarque : pour déterminer b on peut utiliser le point B au lieu d'utiliser le point A.(utiliser les coordonnées de B est vérifier que b = - 4)

2- Droites parallèles et droites perpendiculaires

Propriétés

Soient (d) et (d') deux droites obliques d'équations $(d): y = ax + b$ et $(d') : y = a'x + b'$.

- Si $a = a'$ alors les deux droites sont parallèles ((d) //d')) .
- si les deux droites (d) et (d') sont parallèles ((d) //d')) alors ils ont même coefficient directeur (a=a').
- si $a \times a' = -1$ alors les deux droites (d) et (d') sont perpendiculaires $((d) \perp (d'))$.
- Si les deux droites (d) et (d') sont perpendiculaires $((d) \perp (d'))$ alors $a \times a' = -1$

Exemples

1- A(6 ;1),B(8 ;3), C(12 ;-1) et D(9 ;-4) quatre points du plant rapporté à une repère

- Calculons les coefficients directeurs des droites (AB) , (BC) et (DC).puis déduire que (AB)//(DC) et (AB)⊥(BC)
- Réponse : on note a , a' et a'' respectives les coefficients directeurs des droites (AB) , (BC) et (DC) alors :

➢ $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{8-6} = \frac{2}{2} = 1$; $a' = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-1-3}{12-8} = \frac{-4}{4} = -1$ et $a'' = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{-1-(-4)}{12-9} = \frac{-1+4}{3} = \frac{3}{3} = 1$

➢ comme a=a'' alors (AB)//(DC) et comme a×a'=1×(-1)=-1 alors (AB) ⊥(BC)

2- On se place dans un repère orthonormé (O; I ; J).on considère les points A(-4; 2) ; B(4; 8) et C(7; 4).

a- Déterminer l'équation réduite de la droite (AB)

- La droite (AB) étant oblique alors son équation réduite peut s'écrire sous la forme : $y = ax + b$

Déterminons a .

$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8-2}{4-(-4)} = \frac{6}{4+4} = \frac{6}{8} = \frac{2 \times 3}{2 \times 4} = \frac{3}{4}$

Déterminons b.

$(AB): y = \frac{3}{4}x + b$

$y_B = \frac{3}{4}x_B + b$

$8 = \frac{3}{4} \times 4 + b$

8=3+b

8-3=b

5=b

Finalement l'équation réduite de la droite (AB) est : $y = \frac{3}{4}x + 5$

b- Déterminer l'équation réduite de la droite (d) qui passe par le point C et qui est parallèle à (AB)

- La droite (d) étant oblique alors son équation réduite peut s'écrire sous la forme : $y = mx + p$

Déterminons m : (d) étant parallèle à (AB) alors

$m = a = \frac{3}{4}$

L'équation réduite de la droite (d) : $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$

Déterminons p : le point C appartient à la droite (d) alors :

$y_C = \frac{3}{4}x_C + p$

$4 = \frac{3}{4} \times 7 + p$

$4 = \frac{21}{4} + p$

$4 - \frac{21}{4} = p$

$\frac{16-21}{4} = p$

$p = \frac{-5}{4}$

C- Déterminons l'équation réduite de la droite (d') qui passe par le point B est qui est perpendiculaire à (AB)

- La droite (d') étant oblique alors son équation réduite peut s'écrit sous la forme $y = a'x + b'$

Déteminons a'

(d')⊥(AB) alors a'×a=-1

a'×$\frac{3}{4} = -1$

$$\frac{a' \times \frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{-1}{\frac{3}{4}}$$

$$a' = \frac{-4}{3}$$

Déterminons b' :(d') passe par le point B alors :

$$y_B = \frac{-4}{3}x_B + b'$$

$$8 = \frac{-4}{3} \times 4 + b'$$

$$8 = \frac{-16}{3} + b'$$

$$8 + \frac{16}{3} = b'$$

$$\frac{24}{3} + \frac{16}{3} = b'$$

$$\frac{24 + 16}{3} = b'$$

$$b' = \frac{40}{3}$$

L'équation réduite de la droite (d') est : $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{-4}}{\mathbf{3}}\mathbf{x} + \frac{\mathbf{40}}{\mathbf{3}}$

d-déterminons l'équation réduite de la droite(OC).

- La droite (OC) par O alors l'ordonnée du point d'intersection de la droite (OC) et l'axe des ordonnées et 0 d'où b=0
- $a = \frac{y_C - y_O}{x_C - x_O} = \frac{4-0}{7-0} = \frac{4}{7}$

l'équation réduite de la droite (OC)est : $y = \frac{4}{7}x$

3- cas particulier

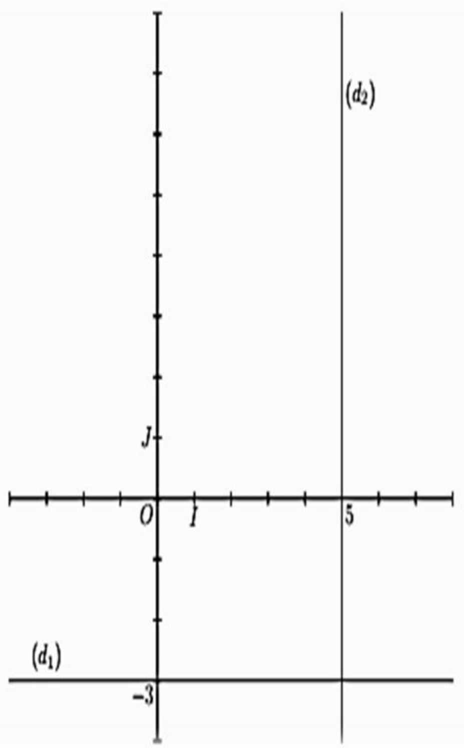
L'équation réduite d'une droite parallèle à l'axe des abscisses

- L'équation réduite d'une droite parallèle à l'axe des abscisses, est de la forme : y=b. (b étant l'ordonnée commune à tous les points de cette droite).

L'équation réduite d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées

- L'équation réduite d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées, est de la forme : x=a. (a étant l'abscisse commun à tous les points de cette droite).

Exemple



Sur le dessin ci-contre, on a dessiné deux droites (d_1) et (d_2).

La droite horizontale (d_1) contient tous les points dont les ordonnées sont égales à -3.
C'est pourquoi, l'équation de la droite (d_1) est $y = -3$.

La droite verticale (d_2) contient tous les points dont les abscisses sont égales à 5.
C'est pourquoi, l'équation de la droite (d_2) est $x = 5$.
NB : ne pas confondre les abscisses avec les ordonnées.