

Chapitre 0: Fonction linéaire et fonction affine

I - Fonction linéaire

1) Définition:

Soit a un nombre réel donné

Toute relation f qui, à tout nombre réel x , fait correspondre le nombre réel ax s'appelle fonction linéaire de coefficient a et on écrit: $f(x) = ax$

On dit que ax est l'image de x par la fonction f .

2) Exemples:

* Exemple ①:

f, g et h sont des fonctions linéaires définies par: $f(x) = \frac{1}{3}x$, $g(x) = 0x$, $h(x) = -\sqrt{5}x$

- f fonction linéaire de coefficient $\frac{1}{3}$
- g fonction linéaire de coefficient 0
- h fonction linéaire de coefficient $-\sqrt{5}$

* Exemple ②:

f fonction linéaire définie par: $f(x) = 2x$

- 1) Calculer $f(0)$, $f(-1)$, $f(\sqrt{3})$
- 2) Calculer l'image de 3 par f (càd $f(3)$)
- 3) Calculer le nombre d'image -8 par la fonction f

Solution:

- 1) * $f(0) = 2 \times 0 = 0$
- * $f(-1) = 2 \times (-1) = -2$
- * $f(\sqrt{3}) = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

2) On a $f(3) = 2 \times 3 = 6$
donc l'image de 3 par la fonction f est 6

3) Résolvons l'équation $f(x) = -8$
L'équation $f(x) = -8$ est respectivement équivalente à

$$2x = -8$$

$$x = \frac{-8}{2} = -4$$

$$\text{donc: } f(-4) = -8$$

Donc le nombre d'image -8 par f est -4

3) Propriété: coefficient d'une fonction linéaire

a - Propo ①:

Si f est fonction linéaire et x un nombre réel non nul, donc:

Le coefficient de la fonction f est:

$$a = \frac{f(x)}{x}$$

b - Exemple:

On considère la fonction linéaire telle:

$$f(2) = 6$$

Déterminons l'expression de la fonction f

* On a f fonction linéaire donc $f(x) = ax$
et son coefficient est: $a = \frac{f(2)}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$$\text{D'où: } f(x) = 3x$$

4) Représentation graphique d'une fonction linéaire:

a - Propo ②:

(O, I, J) un repère orthonormé

La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère O .

b - Exemple:

g est une fonction linéaire définie par:

$$g(x) = -\frac{2}{3}x$$

1) Calculer $g(3)$

2) Construire la représentation graphique de la fonction g dans un repère orthonormé (O, I, J)

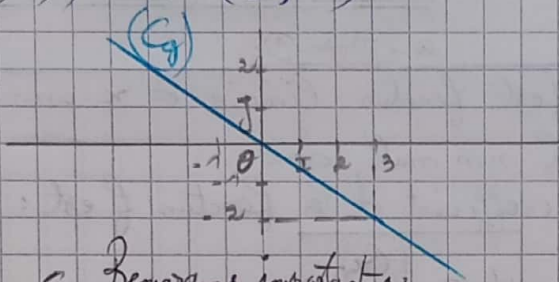
Solution:

1) On a : $g(x) = \frac{-2}{3}x$

donc $g(3) = \frac{-2}{3} \times 3 = -2$

2) On a $g(3) = -2$ et g linéaire

donc la représentation graphique de la fonction est une droite qui passe par les points $O(0;0)$ et $A(3;-2)$



c. Remarques importantes:

1) Le point $M(x;y)$ appartient à la représentation graphique d'une fonction linéaire f signifie que : $f(x) = y$

2) Pour déterminer l'image d'un nombre b par une fonction linéaire f graphiquement, on construit la droite verticale passant par b qui coupe (Cf) la représentation graphique de la fonction f en un point d'ordonnée c donc : $f(b) = c$

3) Pour déterminer le nombre d'image c par une fonction linéaire f graphiquement, on construit la droite horizontale passant par c qui coupe (Cf) en un point d'abscisse c donc $f(c) = b$

4) $f(x) = ax$ fonction linéaire, donc l'équation de la droite (Δ) la représentation graphique de la fonction f est : $(\Delta): y = ax$

5) Exercice d'application:

f est une fonction linéaire définie par : $f(x) = -2x$

1) Est-ce que les points $A(-1; 5)$ et $B(3; -6)$ appartiennent à (Cf)

2) Tracer (Cf)

Solution:

1) * On a $f(-1) = -2 \times -1 = 2 \neq 5$

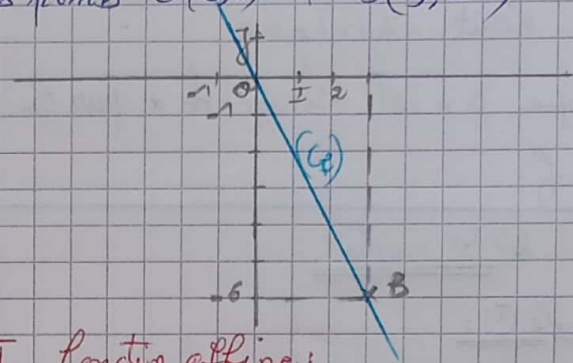
donc $A \notin (Cf)$

* On a $f(3) = -2 \times 3 = -6$

donc $B \in (Cf)$

2) f est une fonction linéaire et $B \in (Cf)$

donc (Cf) est une droite qui passe par les points $O(0;0)$ et $B(3;-6)$



II - fonction affine:

1) Définition:

Soient a et b deux nombres réels donnés. Toute relation f qui, à tout nombre réel x , fait correspondre le nombre réel $ax + b$ s'appelle fonction affine de coefficient a et on écrit : $f(x) = ax + b$. Le nombre $ax + b$ s'appelle l'image de x par la fonction f .

2) Exemples

* Exemple ①:

$f(x) = x - 3$ et $g(x) = 5$ et $h(x) = -\frac{3}{2}x + 1$

→ f fonction affine de coefficient 1

→ g fonction affine de coefficient 0

→ h fonction affine de coefficient $-\frac{3}{2}$

* Exemple ②:

g fonction affine telle que : $g(x) = 2x - 4$

1) Calculer $g(0)$ et $g(1)$

2) Calculer l'image de 2 par la fonction g

3) Déterminer le nombre d'image 6 par la fonction g .

Solution:

1) On a: $g(0) = 2 \times 0 - 4 = -4$
 $g(1) = 2 \times 1 - 4 = 2 - 4 = -2$

2) On a $g(2) = 2 \times 2 - 4 = 4 - 4 = 0$

3) Résolvons l'équation $g(x) = 6$

L'équation $g(x) = 6$ est respectivement équivalente à

$$\begin{aligned} 2x - 4 &= 6 \\ 2x &= 6 + 4 \\ 2x &= 10 \\ x &= \frac{10}{2} = 5 \end{aligned}$$

Alors: $g(5) = 6$

le nombre d'image 6 par la fonction g est 5

3) Propriété: Coefficient de la fonction affine.

a - Propo (3):

Si f est une fonction affine et $x \neq x'$

le coefficient de la fonction f est:

$$a = \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$$

b - Exemple:

Soit une fonction affine telle:

$f(0) = 3$ et $f(1) = 5$

Déterminons l'expression de la fonction f

* On a f est une fonction affine

donc $f(x) = ax + b$

son coefficient est $a = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{5 - 3}{1} = 2$

donc $f(x) = 2x + b$

Déterminons b

On a: $f(0) = 3$ donc: $2 \times 0 + b = 3$

$b = 3$

Alors: $f(x) = 2x + 3$

4) Représentation graphique d'une fonction affine:

a - Propo (4):

(O, I, J) un repère orthonormé.

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite qui passe par les points $A(x; f(x))$ et $B(x'; f(x'))$

b - Exemple:

On considère la fonction affine: $f(x) = 2x + 4$

Tracés dans un repère orthonormé (O, I, J)

(cf) la représentation graphique de la fonction f

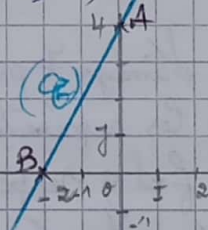
On a: $f(0) = 2 \times 0 + 4 = 4$

$f(-2) = 2 \times (-2) + 4 = -4 + 4 = 0$

(cf) la représentation graphique de la

fonction f est la droite (AB)

telle $A(0; 4)$ et $B(-2; 0)$



c - Remarques importantes:

1) Le point $M(x; y)$ appartient à la représentation graphique de la fonction affine f signifie que: $f(x) = y$

2) Les méthodes graphiques pour déterminer les images et les nombres dont on connaît leurs images sont valables pour une fonction affine

3) $f(x) = ax + b$ fonction affine

donc $f(0) = b$ et l'équation de la droite (Δ) représentation graphique de f est: $(\Delta): y = ax + b$

4) * Intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses $\Rightarrow$ On résout l'équation $f(x)=0$
 $\Rightarrow A(x; 0)$

* Intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées
 $\Rightarrow$ On calcule $f(0)$
 $\Rightarrow B(0; f(0))$

5) La fonction $f(x)=a$ est une fonction affine de coefficient 0 (ou fonction constante) et sa représentation graphique est la droite passant par le point $A(0, a)$ et parallèle à l'axe des abscisses.

* Exercice d'application:

f et g deux fonctions telles:

$$f(x)=ax \text{ et } g(x)=2x+b$$

1) Déterminer a et b telles:

$$f(-1)=3 \text{ et } g(0)=5$$

2) Calculer $f(2)$ et $g(-1)$

3) Déterminer le nombre d'image -4 par la fonction f

4) Déterminer le nombre d'image 7 par g

5) Tracer (D) et (Δ) les représentations graphiques des fonctions f et g respectivement.

6) Déterminer les coordonnées de H point d'intersection de (D) et (Δ) graphiquement et algébriquement.

* Solution:

1) f est une fonction linéaire, donc son coefficient est: $a = \frac{f(-1)}{-1} = \frac{3}{-1} = -3$
 $\Rightarrow f(x) = -3x$

* On a $g(0)=5$ donc $2 \times 0 + b = 5$
 $b = 5$

$$\text{Alors: } g(x) = 2x + 5$$

$$2) * f(2) = -3 \times 2 = -6$$

$$* g(-1) = 2 \times (-1) + 5 = -2 + 5 = 3$$

3) L'équation $f(x) = -4$ est équivalente à
 $-3x = -4$
 $x = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$

$$\text{alors } f\left(\frac{4}{3}\right) = -4$$

* L'équation $g(x) = 7$ est équivalente

$$2x + 5 = 7$$

$$2x = 7 - 5$$

$$2x = 2$$

$$x = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{Alors: } g(1) = 7$$

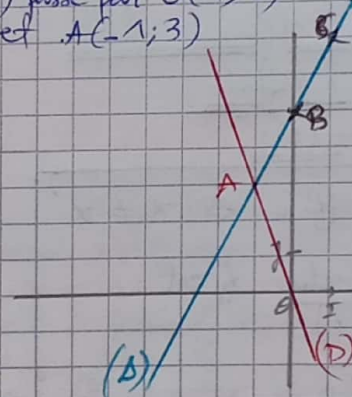
5)

x	0	-1
$f(x)$	0	3

x	0	1
$g(x)$	5	7

(D) passe par $O(0; 0)$ et $A(-1; 3)$

(Δ) passe par $B(0; 5)$ et $C(1; 7)$



6) * graphiquement

Les deux droites (D) et (Δ) se coupent au point $H(-1; 3)$

* algébriquement On résout l'équation $f(x) = g(x)$

L'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à

$$-3x = 2x + 5$$

$$-3x - 2x = 5$$

$$-5x = 5$$

$$x = \frac{5}{-5} = -1$$

$$\text{et on a } f(-1) = 3$$

Alors le point $H(-1; 3)$ est le point d'intersection de (D) et (Δ)