Direction provinciale : Khemisset Etablissement : Mohamed ELQOURI Niveau : 3APIC	Chapitre N° 6 : Fonction linéaire et Fonction affine	Matière : Mathématiques Année Scolaire : 2019/2020 Professeur : LAHSAINI Yassin

1 – Généralités sur les fonctions

a – Définition

Une fonction f de la variable x est un procédé de calcul qui permet d'associer à toute valeur de x une valeur notée $f(x)$.
Le nombre $f(x)$ est appelé l'image de x par la fonction f.
Le nombre x est appelé l'antécédent de $f(x)$ par la fonction f

b – Remarque :

On note une fonction par une lettre : f , h , s.....................

c – Exemple : *soit ABCD un rectangle de longueur x et de largeur $x-2$.*

- ✓ *Le périmètre de ce rectangle noté $P(x)$ tel que :* $P(x) = 2(x + x - 2)$*.Je simplifie :* $P(x) = 4x - 4$
- ✓ P *est une fonction de variable* x.
- ✓ $4x - 4$ *est l' images de* x *par la fonction* P.

Si $x = 3$ alors :

- ✓ *Le périmètre de ce rectangle noté $P(3)$ tel que :* $P(3) = 4 \times 3 - 4 = 12 - 4 = 8$.
- ✓ *8 est l'image de 3 par la fonction P et 3 est l'antécédent de 8 par la fonction P.*
- ❖ *L'aire de ce rectangle noté $A(x)$ tel que :* $A(x) = x \times (x-2)$*. Je simplifie :* $A(x) = x^2 - 2x$
- ❖ A *est une fonction de variable* x
- ❖ $x^2 - 2x$ *est l' images de* x *par la fonction* A

Si $x = 4$ alors :

- ➢ *L'aire de ce rectangle noté $A(4)$ tel que :* $A(4) = 4 \times (4-2) = 4 \times 2 = 8$.
- ➢ *8 est l'image de 4 par la fonction A et 4 est l'antécédent de 8 par la fonction A.*

d – Application : *On considère les deux tableaux suivants :*

x	0	1	4	7
$f(x)$	0	2	8	14

x	0	1	4	7
$g(x)$	0	1	16	49

Complète ce qui suit :

- ✓ *L'expression de la fonction f est ....*
- ✓ *8 est ....de ..... par ...... ; et 4 est..... de ..... par ....*
- ✓ *L'expression de la fonction g est ....*
- ✓ *7 est ....de ..... par ...... ; et 49 est..... de ..... par ....*

Correction :

- ✓ *L'expression de la fonction f :* $f : x \to 2x$.
- ✓ *8 est l'image de 4 par la fonction f.* *4 est l'antécédent de 8 par la fonction f.*
- ✓ *L'expression de la fonction g :* $g : x \to x^2$.
- ✓ *7 est l'antécédent de 49 par la fonction g.* *49 est l'image de 7 par la fonction g.*

2 – La fonction linéaire

a – Définition

S*oit a un nombre réel fixe.*
Une fonction f est dite linéaire si elle est de la forme :
$f : x \to ax$.

- ✓ *a désigne le coefficient de linéarité.*
- ✓ *ax est l'image de x par la fonction f.*
- ✓ *x est l'antécédent de ax par la fonction f.*

b – Remarque :

- ✓ *Si f une fonction linéaire de coefficient a alors :* $a = \frac{f(x)}{x}$ *pour tout nombre réel x non nul.*
- ✓ *Une fonction linéaire modélise une situation de proportionnalité : x et $f(x)$ sont proportionnels.*

c- Exemple :

Soit f la fonction linéaire de coefficient 4 alors :
L'expression de la fonction f est : $f : x \to 4x$.
L'image de x par la fonction f est : $f(x) = 4x$.
L'image de $\sqrt{2}$ par la fonction f est : $f(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$.
L'image de -1 par la fonction f est :
$f(-1) = 4 \times (-1) = -4$.

d-Application :

On considère la fonction suivante : $h : x \to x(x+3) - x^2$.

1- *Montrons que la fonction h est linéaire.*
2- *Calculons l'image de $\frac{2}{3}$ par la fonction h.*
3- *Déterminons l'antécédent de $\sqrt{3}$*

Correction :

1- $h : x \to x^2 + 3x - x^2$ *alors* $h : x \to 3x$ *d'où h est une fonction linéaire de coefficient 3.*
2- $f\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \times \frac{2}{3} = 2$ *d'où* $f\left(\frac{2}{3}\right) = 2$
3- $f(x) = \sqrt{3}$ *signifie que* $3x = \sqrt{3}$ *d'où* $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ *alors l'antécédent de $\sqrt{3}$ c'est* $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3 – La représentation graphique d'une fonction linéaire

a – Définition :

La représentation graphique d'une fonction linéaire f est l'ensemble des points de cordonnées $(x, f(x))$.

b – Propriété:

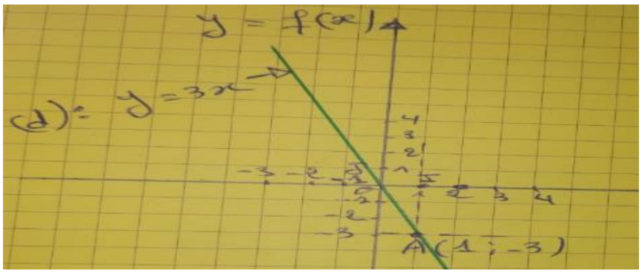
- *Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction linéaire f est la droite qui passe par l'origine du repère et les points de cordonnées $(x, f(x))$.*
- *On dit que la représentation de la fonction linéaire f est la droite d'équation réduite $y = ax$*

c – Remarque :

On note la représentation graphique d'une fonction f par (C_f) ou par (d) ,(D), (Δ)....

d – Exemple :

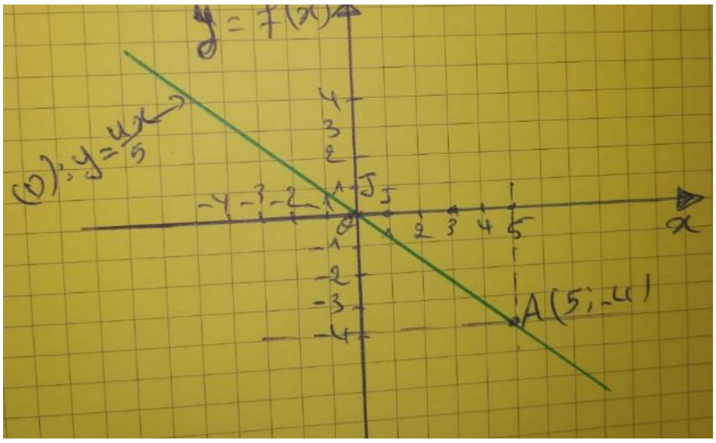
On considère la fonction f telle que $f(x) = -3x$.
$f(1) = -3 \times 1 = -3$ *d'où* $f(1) = -3$
f est une fonction linéaire alors (C_f) passe par O(0,0) et $A(1, -3)$.



Exercice :

Soit f une fonction linéaire telle que : $f(5) = 4$.

1. *Déterminons l'expression de $f(x)$ puis calculons $f(\frac{-7}{2})$*
2. *Déterminons l'antécédent de -4.*
3. *Sans faire des calculs calculons $\frac{f(2020)}{2020}$*
4. *Traçons (C_f) la représentation graphique de f dans un repère orthogonal (O, I,J).*



Correction :

1. *f est une fonction linéaire alors elle s'écrit sous la forme : $f(x) = ax$ avec $a = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(5)}{5} = \frac{4}{5}$*

   D'où $f(x) = \frac{4}{5}x$

   $f\left(\frac{-7}{2}\right) = \frac{4}{5} \times \frac{-7}{2} = \frac{-14}{5}$
2. *Soit k un nombre réel tel que $f(k) = -4$*

D'une part on a $f(k) = \frac{4}{5}k$ et d'autre part on a $f(k) = -4$

Alors $\frac{4}{5}k = -4$,je multiplie par $\frac{5}{4}$: $k = -4 \times \frac{5}{4}$= -5

Finalement l'antécédent de -4 est -5

3. *On a : $a = \frac{f(x)}{x}$*

si $x = 2020$ alors $\frac{f(2020)}{2020} = \frac{4}{5}$.

4. *(C_f) passe par les points : $(x; f(x))$ alors :*
   (C_f) passe par O(0,0) et $A(5, -4)$

4 – La fonction affine

a – Définition

Soit a et b deux nombres réels fixes.
Une fonction f est dite affine si elle est de la forme :
$f : x \to ax + b$.

- ✓ *a désigne le coefficient de f.*
- ✓ *$ax + b$ est l'image de x par la fonction f.*
- ✓ *x est l'antécédent de $ax + b$ par la fonction f.*

b – Remarques

- *une fonction linéaire est une fonction affine.*
- *Une fonction affine ne modélise pas une situation de proportionnalité : x et $f(x)$ ne sont pas proportionnels.*

c – propriété

Soient x et x' deux nombres réels quelconques $(x \neq x')$.
Si f est une fonction affine de coefficient a alors :

$$a = \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$$

d – Exemples

1. *Soit la fonction affine : $f : x \to 2x - 1$ alors :*
   - *Le coefficient de f est 2.*
   - *L'image de 3 est : $f(3) = 2 \times 3 - 1 = 6 - 1 = 5$.*
   - *On note k l'antécédent de 0 .$(f(k) = 0)$:*

D'une part $f(k) = 2k - 1$ et d'autre part $f(k) = 0$ alors $2k - 1 = 0$ d'où $= \frac{1}{2}$.

L'antécédent de 0 est $\frac{1}{2}$

2. *Soit g la fonction affine telles que $g(3) = 5$ et $g(5) = 13$.*
   - *Le coefficient de g :$a = \frac{g(5)-g(3)}{5-3} = \frac{13-5}{2} = \frac{8}{2} = 4$*
   - *L'expression de $g(x)$: $g(x) = 4x + b$*

D'une part $g(3) = 4 \times 3 + b = 12 + b$ et d'autre part $g(3) = 5$ alors $12 + b = 5$ d'où $b = -7$

Finalement $g(x) = 4x - 7$

5 – La représentation graphique d'une fonction affine

a – Propriété:

- *Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine f est la droite qui passe par les points de cordonnées $(x, f(x))$.*
- *On dit que la représentation de la fonction affine f est la droite d'équation réduite $y = ax + b$*

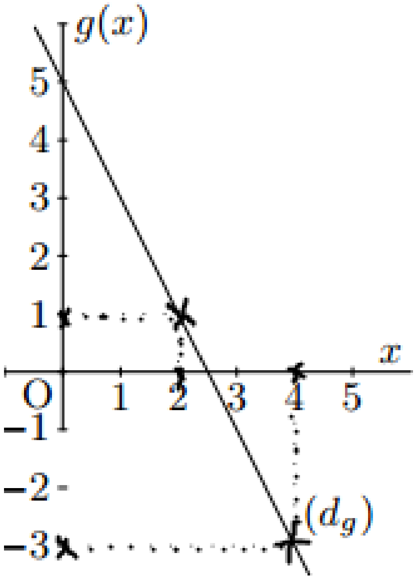
b – Exemple:

g est la fonction affine définie par : $g: x \to -2x + 5$

$g(0) = -2 \times 0 + 5 = 5$

$g(2) = -2 \times 2 + 5 = -4 + 5 = 1$

x	0	2
$g(x)$	5	1
$M(x, g(x))$	(0,5)	(2,1)



c – Application

ABCD est un carré de côté x et EFGH est un rectangle de largeur x et longueur $x + 10$.

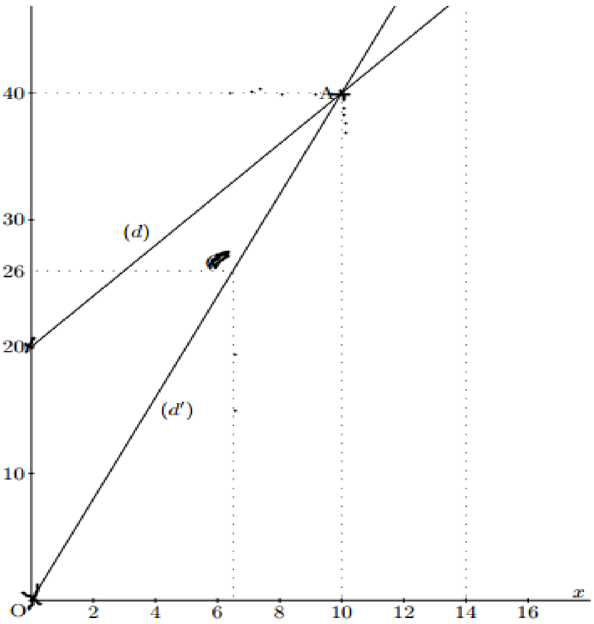
1- Dans un repère, représenté la fonction affine définie par $f: x \to 2x + 20$ et la fonction linéaire définie par $g: x \to 4x$.

2- Déterminons x pour que le périmètre du carré soit égal au périmètre du rectangle.

Correction

x	0	10
$f(x)$	20	40

x	0	10
$g(x)$	0	40



2- $P_{ABCD} = 4x$ *et* $P_{EFGH} = 2(x + 10) = 2x + 20$

$P_{ABCD} = P_{EFGH}$ *signifie que* $f(x) = g(x)$.

D'après le graphe $x = 10$

6 – *cas* particuliers

k est un nombre réel constant.

La fonction f définie par : $f: x \to k$ est appelé fonction constante.

L'image de chaque nombre réel est le nombre k

la représentation graphique de f est la droite équation réduite : $y = k$.

la fonction définie par : $g: x \to 0$ est appelé fonction nulle. sa représentation graphique est la droite d'équation $y = 0$. (et l'axe des abscisses)

Exemple

soit la fonction f telle que $f: x \to 3$.

$f(0) = 3$, $f(5) = 3$, $f\left(\frac{3}{7}\right) = 3$, $f(\sqrt{3})=3$

La représentation de la fonction f est la droite (Δ) d'équation : $y = 3$

soit la fonction g telle que $g: x \to 0$.

$g(0) = 0$, $g(5) = 0$, $g\left(\frac{3}{7}\right) = 0$, $g(\sqrt{3})=0$

La représentation graphique de la fonction g est la droite (D) d'équation $y = 0$.