

Chapitre 3 : Le repère dans le plan

Les coordonnées d'un point

Repère orthonormé du plan

On a: $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ = 1$

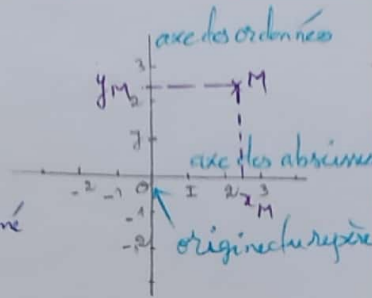
Le repère (O, I, J) s'appelle repère orthonormé

On dit que le plan est rapporté à un repère orthonormé

Le point O s'appelle l'origine du repère

La droite (OI) est appelée: l'axe des abscisses

La droite (OJ) est appelée: l'axe des ordonnées



Coordonnées d'un point

Pour tout point M du plan, il existe un couple unique de nombres réels $(x_M; y_M)$ appelé couple de coordonnées du point M . x_M est l'abscisse de M et y_M est l'ordonnée de M et on écrit: $M(x_M; y_M)$

Coordonnées du milieu d'un segment

M milieu du segment $[AB]$

$$\text{Donc: } M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

* Remarque:

→ Si $M \in (OI)$ alors: $M(x_M; 0)$

→ Si $M \in (OJ)$ alors: $M(0; y_M)$

→ $O(0; 0)$ et $I(1; 0)$ et $J(0; 1)$

La distance entre deux points

Propriété: Méthode ①

Si $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple: $A(1; 5)$ et $B(3; 9)$ et $C(11; 5)$ et $D(9; 1)$ Montrer que $ABCD$ est rectangle

Remarque importante: Méthode ②

Si $\vec{AB}(a; b)$

$$\text{donc } AB = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{On a } \vec{AB}(3-1, 9-5)$$

$$\Rightarrow \vec{AB}(2; 4)$$

$$\vec{DC}(11-9, 5-1)$$

$$\Rightarrow \vec{DC}(2; 4)$$

$$\text{Alors } \vec{AB} = \vec{DC}$$

donc $ABCD$ est

parallélogramme

$$\text{On a } \vec{BC}(11-3, 5-9)$$

$$\Rightarrow \vec{BC}(8; -4)$$

$$\vec{AC}(11-1, 5-5)$$

$$\Rightarrow \vec{AC}(10; 0)$$

$$\text{On a } AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

$$BC = \sqrt{8^2 + (-4)^2} = \sqrt{80}$$

$$AC = \sqrt{10^2 + 0^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$\text{On a } AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Donc d'après le théorème de Pythagore réciproque,

le triangle ABC est rectangle

en B

Alors $ABCD$ est rectangle

Les coordonnées d'un vecteur

Coordonnées de vecteur

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$

$$\text{On a: } \vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

Egalité de deux vecteurs

Si $\vec{AB}(a; b)$ et $\vec{CD}(x; y)$

On a $\vec{AB} = \vec{CD}$ c'est-à-dire $a = x$ et $b = y$
deux vecteurs sont égaux si ils ont même coordonnées

Somme et différence de deux vecteurs

Si $\vec{AB}(a; b)$ et $\vec{CD}(x; y)$

$$\text{On a: } \vec{AB} + \vec{CD}(a+x; b+y)$$

$$\vec{AB} - \vec{CD}(a-x; b-y)$$

Produit de vecteur par un nombre réel

Si $\vec{AB}(a; b)$ et K un nombre réel

$$\text{On a: } K \times \vec{AB}(Ka; Kb)$$

Question ①

Montrer que A, B et C sont alignés

Donc on doit montrer que

$$\vec{AB} = K \vec{AC} \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

$$A(2; -1), B(3; 5) \text{ et } C(4; 11)$$

$$\vec{AB}(3-2, 5-(-1))$$

$$\vec{AB}(1, 6)$$

$$\vec{AC}(4-2, 11-(-1))$$

$$\vec{AC}(2, 12)$$

$$\Rightarrow \vec{AC} = 2 \vec{AB}$$

Alors A, B et C alignés

Questions classiques

Question ②

Déterminer les coordonnées de D

tel que $ABCD$ parallélogramme

On cherche coordonnées de D

$$\text{tel que: } \vec{AB} = \vec{DC}$$

$$A(3; 3), B(2; -4) \text{ et } C(-3; -1)$$

$$ABCD \text{ parallélogramme}$$

$$\text{Si } \vec{AB} = \vec{DC}$$

$$\text{Si } \begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases}$$

$$\text{Si } \begin{cases} 1 - 3 = -2 - x_D \\ -4 - 3 = -2 - y_D \end{cases}$$

$$\Rightarrow D(0; 5)$$

Question ③

Nature du triangle ABC

* ABC isocèle en A c'est-à-dire

$$AB = AC$$

* ABC équilatéral c'est-à-dire

$$AB = BC = AC$$

* ABC rectangle en A si

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Théorème de Pythagore directe

* ABC triangle rectangle

et isocèle

Question ④: Nature du quadrilatère $ABCD$

→ On montre d'abord que $ABCD$ est parallélogramme $\vec{AB} = \vec{DC}$

→ $ABCD$ rectangle: Si $ABCD$ parallélogramme + ABD triangle rectangle en A
(ou bien les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ égaux c'est-à-dire $AC = BD$)

→ $ABCD$ losange: Si $ABCD$ parallélogramme + ABD isocèle en A

→ $ABCD$ carré: ou bien les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont perpendiculaires $(AC) \perp (BD)$
 $ABCD$ parallélogramme + ABD triangle rectangle isocèle en A
ou bien les diagonales (AC) et (BD) égaux et perpendiculaires $(AC) \perp (BD)$ et $AC = BD$