

Chapitre 3: Le repère dans le plan

1. Les coordonnées d'un point:

1) Repère orthonormé du plan:

O, I et J trois points du plan tel que:

$$(OI) \perp (OJ) \text{ et } OI = OJ = 1$$

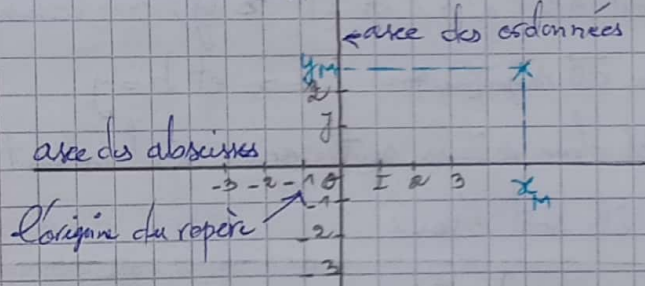
* Le repère (O, I, J) s'appelle repère orthonormé.

On dit que le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J)

* Le point O est appelé: l'origine du repère

* La droite (OI) est appelée: l'axe des abscisses

* La droite (OJ) est appelée: l'axe des ordonnées.



2) Les coordonnées d'un point:

a. Définition:

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, pour tout point M , il existe un couple unique de nombres réels $(x_M; y_M)$ appelé couple de coordonnées du point M

x_M est appelé l'abscisse de M

y_M est appelé l'ordonnée de M

et on écrit: $M(x_M; y_M)$

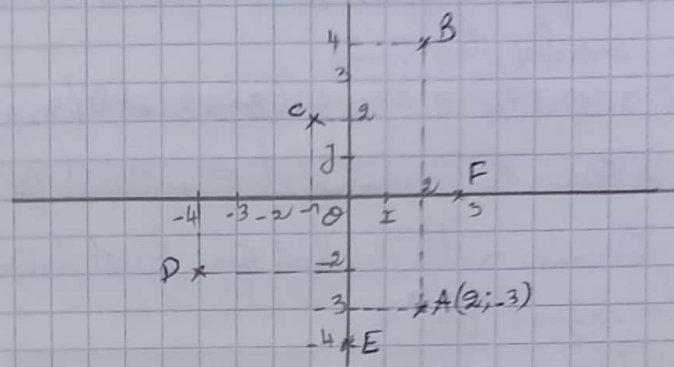
b. Exemple:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé On a:

Plaçons les points:

$A(2; -3); B(2; 4); C(-1; 2)$

$D(-4; -2); E(0; -4); F(3; 0)$



c. Remarques importantes:

* (O, I, J) un repère orthonormé, donc $O(0; 0)$ et $I(1; 0)$ et $J(0; 1)$

* Si M est un point de l'axe des abscisses donc $y_M = 0$ et on écrit $M(x_M; 0)$

* Si M est un point de l'axe des ordonnées donc $x_M = 0$ et on écrit $M(0; y_M)$

3) Les coordonnées du milieu d'un segment

a. Définition:

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.

Si M est le milieu du segment $[AB]$, alors

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

et on écrit: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

b. Exemple:

Soient $A(-2; 6)$ et $B(4; -8)$

Déterminons les coordonnées du point E milieu du segment $[AB]$

$$x_E = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_E = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6 + (-8)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

donc $E(1; -1)$

c - Exercice d'application :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points :

A(-2; 1) et B(2; 2) et C(3; -2) et D(x; y)

1) Déterminer les coordonnées de E milieu de [AC]

2) Déterminer x et y sachant que E est milieu du segment [BD]

Solution :

1) E milieu du segment [AC]

$$\text{donc } E\left(\frac{-2+3}{2}; \frac{1+(-2)}{2}\right)$$

$$\text{Alors : } E\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

2) E milieu du segment [BD]

$$\text{donc } \begin{cases} x_E = \frac{x_B + x_D}{2} \\ y_E = \frac{y_B + y_D}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{2+x}{2} \\ -\frac{1}{2} = \frac{2+y}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \cdot 2 - 2 = -1 \\ y = -1 \cdot 2 - 2 = -3 \end{cases}$$

$$\text{Alors : } D(-1; -3)$$

II - Les coordonnées d'un vecteur :

1) Les coordonnées d'un vecteur :

a - Définition :

Dans un repère orthonormé (O, I, J), soit

les points A(x_A; y_A) et B(x_B; y_B)

Les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ sont :

$$x_B - x_A \text{ et } y_B - y_A$$

et on écrit : $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$

b - Exemples :

Soient A(2; 3) et B(-1; -4) et C(3; 2)

* Les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$

$$\text{On a } \vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

$$\vec{AB}(-1-2; -4-3)$$

$$\vec{AB}(-3; -7)$$

$$\text{Donc : } \vec{AC}(x_C - x_A; y_C - y_A)$$

$$\vec{AC}(3-2; 2-3)$$

$$\vec{AC}(1; -1)$$

* Les coordonnées du point E tel que $\vec{AE}(1; 1)$

$$\text{On a } \vec{AE}(x_E - x_A; y_E - y_A)$$

$$\vec{AE}(x_E - 2; y_E - 3)$$

$$\text{Comme } \vec{AE}(1; 1)$$

$$\text{donc } \begin{cases} x_E - 2 = 1 \\ y_E - 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_E = 1 + 2 = 3 \\ y_E = 1 + 3 = 4 \end{cases}$$

$$\text{Alors : } E(3; 4)$$

2) Egalité de deux vecteurs :

a - Propriété :

Soient $\vec{AB}(a; b)$ et $\vec{CD}(x; y)$ deux vecteurs

$\vec{AB} = \vec{CD}$ signifie que : $a = x$ et $b = y$

C'est deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils sont égaux.

b - Exemples :

Soient A(2; 3); B(-2; 1); C(-1; 2)

et D(3; 1)

Comparons les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$

$$\text{On a } \begin{cases} \vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A) \\ \vec{DC}(x_C - x_D; y_C - y_D) \end{cases}$$

$$\vec{AB}(-2-2; 1-3)$$

$$\vec{DC}(-1-3; 2-1)$$

$$\vec{AB}(-4; -2)$$

$$\vec{DC}(-4; 1)$$

$$\text{Donc : } \vec{AB} \neq \vec{DC}$$

c - Exercice d'application :

On considère les points A(2; -2)

B(4; -1); C(-6; -2)

Déterminer le couple des coordonnées du point D tel que ABCD est parallélogramme.

Solution:

ABCD parallélogramme signifie que

$$\vec{AB} = \vec{DC}$$

signifie que $\begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases}$

càd $\begin{cases} 4 - 2 = -6 - x_D \\ -1 + 2 = -2 - y_D \end{cases}$

càd $\begin{cases} x_D = -6 - 2 = -8 \\ y_D = -2 - 1 = -3 \end{cases}$

Donc $D(-8; -3)$

3) Coordonnées de la somme et différence de deux vecteurs:

a - propo (2):

On considère les vecteurs $\vec{AB}(a; b)$ et $\vec{CD}(x; y)$

On a: $\begin{cases} \vec{AB} + \vec{CD} (a+x; b+y) \\ \vec{AB} - \vec{CD} (a-x; b-y) \end{cases}$

b - Exemples:

Soient $\vec{AB}(3; -1)$ et $\vec{CD}(2; -4)$

On a: $\vec{AB} + \vec{CD} (3+2; -1+(-4))$

$\vec{AB} + \vec{CD} (5; -5)$

* $\vec{AB} - \vec{CD} (3-2; -1-(-4))$

$\vec{AB} - \vec{CD} (1; 3)$

c - Exercices d'application:

On considère les points A(2; -1) et B(3; 5)

D(-3; 7) et C(x; y) et M(-7; 21)

1) Déterminer x et y sachant que $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$

2) ~~Montrer~~ Montrer que $\vec{DM} = \vec{AB} + \vec{AD}$

Solution:

1) On a $\vec{AB}(3-2; 5-(-1))$

donc $\vec{AB}(1; 6)$

on a $\vec{AD}(-3-2; 7-(-1))$

donc $\vec{AD}(-5; 8)$

donc $\vec{AB} + \vec{AD}(1+(-5); 6+8)$

$\vec{AB} + \vec{AD}(-4; 14)$

et on a $\vec{AC}(x-2; y+1)$

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} \text{ signifie que } \begin{cases} x-2 = -4 \\ y+1 = 14 \end{cases}$$

donc $\begin{cases} x = -4+2 = -2 \\ y = 14-1 = 13 \end{cases}$

Alors C(-2; 13)

2) On a $\vec{DM}(x_M - x_D; y_M - y_D)$

$\vec{DM}(-7+3; 21-7)$

donc $\vec{DM}(-4; 14)$

et on a: $\vec{AB} + \vec{AD}(-4; 14)$

Alors: $\vec{DM} = \vec{AB} + \vec{AD}$

4) Les coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel:

a - propo (3):

Si $\vec{AB}(a; b)$ un vecteur et k un nombre réel, alors:

$k \times \vec{AB}(ka; kb)$

b - Exemple:

On considère le vecteur $\vec{AB}(3; -1)$

On a: $2\vec{AB}(2 \times 3; 2 \times (-1))$

donc: $2\vec{AB}(6; -2)$

et on a: $-4\vec{AB}(-4 \times 3; -4 \times (-1))$

donc: $-4\vec{AB}(-12; 4)$

c - Exercice d'application:

On considère les points A(2; -1)

et B(3; 5) et C(4; 11)

Montrer que les points A, B et C sont alignés

* Solution: Pour montrer que les points A, B et C sont alignés, on montre que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires càd $\vec{AC} = k \vec{AB}$

On a $\vec{AB}(3-2; 5-(-1))$

donc $\vec{AB}(1; 6)$

on a $\vec{AC}(4-2; 11-(-1))$

$\vec{AC}(2; 12)$

On a $2\vec{AB}(2; 12)$

Donc $\vec{AC} = 2\vec{AB}$

D'où les points A, B et C sont alignés.

III. La distance entre deux points :

1) Propriété :

Dans un repère orthonormé, si on a :

$A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$

Alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

* Remarque importante :

Si $A(x; y)$ alors $AB = \sqrt{x^2 + y^2}$

2) Exemples :

Soient $A(3; 4)$ et $E(3; 1)$ et $F(0; -2)$

deux points du plan rapportés à un repère orthonormé.

Calculer AB et EF

* Calcul de AB

On a $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$

D'où : $AB = 5$

* Calcul de EF :

→ Méthode (1) : Propriété (1)

On a $EF = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2}$
 $= \sqrt{(0 - 3)^2 + (-2 - 1)^2}$
 $= \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$

D'où : $EF = 3\sqrt{2}$

→ Méthode (2) : Passage par $\vec{EF}$

On a $\vec{EF} = (0 - 3; -2 - 1)$

$\vec{EF} = (-3; -3)$

Donc $EF = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}$
 $= \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$

$EF = 3\sqrt{2}$

3) Exercice d'application :

Dans un repère orthonormé, on considère

les points $A(1; 5)$, $B(3; 9)$

$C(11; 5)$ et $D(9; 1)$

Montrez que ABCD est un rectangle.

Solution :

* On a $\vec{AB} = (3 - 1; 9 - 5)$

$\vec{AB} = (2; 4)$

et $\vec{DC} = (11 - 9; 5 - 1)$

$\vec{DC} = (2; 4)$

donc $\vec{AB} = \vec{DC}$ c'est-à-dire ABCD est un parallélogramme

Montrons que ABC est un triangle rectangle en B

On a $\vec{BC} = (11 - 3; 5 - 9)$

$\vec{BC} = (8; -4)$

et $\vec{AC} = (11 - 1; 5 - 5)$

donc $\vec{AC} = (10; 0)$

$AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

On a $AC = \sqrt{10^2 + 0^2} = \sqrt{100} = 10$

$BC = \sqrt{8^2 + (-4)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

On a $AB^2 + BC^2 = \sqrt{20}^2 + \sqrt{80}^2 = 20 + 80 = 100$

donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

Alors ABCD est rectangle.