Chapitre ② : Vecteurs et translation

Partie ① : Les vecteurs

I _ Le vecteur :

1) Caractéristiques d'un vecteur non nul :

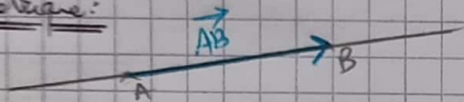
*Définition

A et B deux points différents du plan
Le couple (A,B) détermine le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de caractéristiques :

→ La direction : c'est la droite (AB)
→ Le sens : le sens de la demi droite [AB) càd de A vers B
→ la norme (module) : la distance AB

- le point A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$
- Le point B est l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$

*figure géométrique :



2) Vecteur nul :

*Définition :
- Chaque point A détermine un vecteur nul $\overrightarrow{AA}$ noté $\vec{0}$ et on écrit ; $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$
- Si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ alors $A = B$ (càd les points A et B sont confondus)

→ Remarque : La norme d'un vecteur nul est zéro, mais la direction et le sens ne sont pas définis.

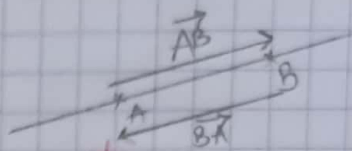
3) L'opposé d'un vecteur :

*Définition :

A et B deux points, on a :
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$
Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ s'appelle l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et on écrit $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

*figure géométrique :

On a : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$



II _ Égalité de deux vecteurs :

1) Définition :

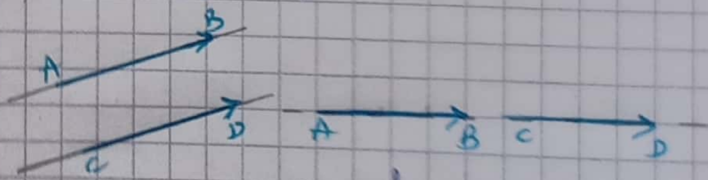
*Dire que deux vecteurs sont égaux signifie qu'ils ont même direction, même sens et même norme.

* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que :
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction càd $(AB) \parallel (CD)$
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même sens
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même norme càd $AB = CD$

*Remarque :
même direction signifie que leurs directions sont : soit deux droites strictement parallèles, soit deux droites confondues.

*figure géométrique :

On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$



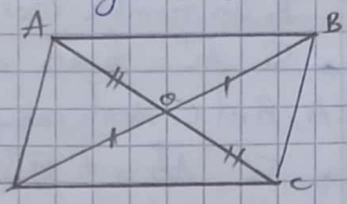
premier cas   deuxième cas

2) Propriétés importantes :

1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ est équivalent à les segments [AC] et [BD] ont même milieu
2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ équivalent à ABCD est un parallélogramme.

* figure géométrique :

ABCD est un parallélogramme



On a : 1) $\vec{AB} = \vec{DC}$

2) les segments [AC] et [BD] ont même milieu

* Remarque :

ABCD parallélogramme signifie que $\begin{cases} \vec{AB} = \vec{DC} \\ \vec{BA} = \vec{CD} \\ \vec{AD} = \vec{BC} \\ \vec{DA} = \vec{CB} \end{cases}$

3) Exercice d'application :

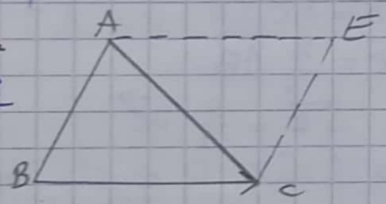
Soit ABC un triangle

1) Construire le point E telque $\vec{AE} = \vec{BC}$

2) Montrer que : $\vec{AB} = \vec{EC}$

Solution :

1) $\vec{AE} = \vec{BC}$



2) On a $\vec{AE} = \vec{BC}$

Donc AECB est un parallélogramme

Alors $\vec{AB} = \vec{EC}$

III – Somme de deux vecteurs :

1) Définition

On dit que le vecteur $\vec{AC}$ est la somme des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ si ABCD est un parallélogramme

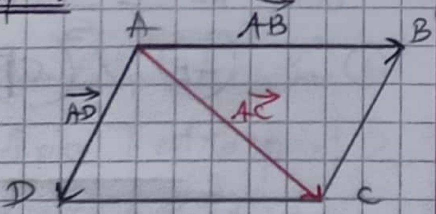
et on écrit : $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$

* figure géométrique :

ABCD est un parallélogramme

donc

$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$



Recapitulatif d'un parallélogramme

ABCD est un parallélogramme, donc ;

① $\begin{cases} \vec{AB} = \vec{DC} \\ \vec{BA} = \vec{CD} \\ \vec{AD} = \vec{BC} \\ \vec{DA} = \vec{CB} \end{cases}$ ② $\begin{cases} \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC} \\ \vec{BA} + \vec{BC} = \vec{BD} \\ \vec{CB} + \vec{CD} = \vec{CA} \\ \vec{DA} + \vec{DC} = \vec{DB} \end{cases}$

③ [AC] et [BD] ont même milieu

2) Relation de Chasles :

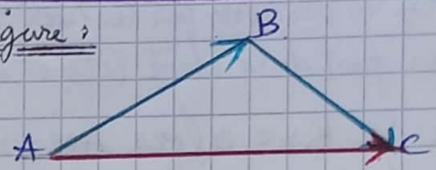
a – Propo :

Si A, B et C sont trois points du plan alors : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

Cette égalité s'appelle Relation de Chasles

b – figure :

$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$



c – Exemples :

Simplifions les écritures suivantes :

* $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{AC} + \vec{CA}$
$= \vec{AA} = \vec{0}$

* $\vec{AC} - \vec{BC} + \vec{BE} = \vec{AC} + \vec{CB} + \vec{BE}$
$= \vec{AB} + \vec{BE}$
$= \vec{AE}$

* $\vec{AB} + \vec{ED} + \vec{BE} + \vec{DC} = \vec{AB} + \vec{BE} + \vec{ED} + \vec{DC}$
$= \vec{AE} + \vec{EC} = \vec{AC}$

3) Exercice d'application :

Soit ABC un triangle

1) a) Construire le point E telque $\vec{AC} = \vec{AE} + \vec{AB}$

b) Construire les points M et N les symétriques respectifs de A et C par rapport à B

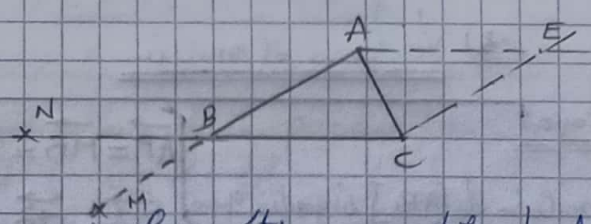
2) Montrer que $\vec{NC} = \vec{NA} + \vec{NM}$

Solution

1) a) On a $\vec{AC} = \vec{AE} + \vec{AB}$ donc AECB est un parallélogramme.

b) On a M et N les symétriques respectifs de A et C par rapport à B

donc B est milieu des segments [AM] et [CN]



2) On a M et N les symétriques respectifs de A et C par rapport à B

Donc B est milieu des diagonals [AM] et [NC]

d'où ACMN est parallélogramme.

Alors : $\vec{NC} = \vec{NA} + \vec{NM}$

IV - Produit d'un vecteur par un nombre réel :

1) Définition :

Soient $\vec{AB}$ un vecteur non nul et K nombre réel. On appelle le vecteur $\vec{AM}$ le produit du vecteur $\vec{AB}$ par le réel K si M est un point de la droite (AB) et on écrit : $\vec{AM} = K\vec{AB}$

* Si $K > 0$ alors $AM = K \times AB$ et $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ ont même sens
* Si $K < 0$ alors $AM = -K \times AB$ et $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ ont des sens opposés
* Si $K = 0$ alors : A et M sont confondus.

Remarque : $0 \times \vec{AB} = \vec{0}$ et $K \times \vec{0} = \vec{0}$

2) Exemples :

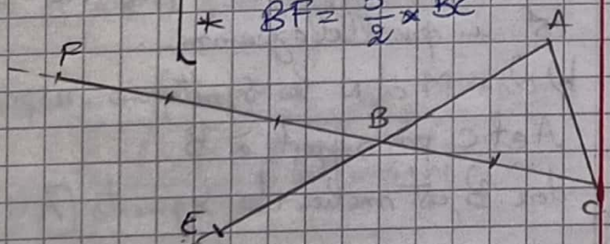
ABC un triangle

Construisons les points E et F telsque :

$\vec{AE} = 2\vec{AB}$ et $\vec{BF} = -\frac{3}{2}\vec{BC}$

$\vec{AE} = 2\vec{AB}$ donc
$$\begin{cases} * \; E \in (AB) \\ * \; \vec{AE} \text{ et } \vec{AB} \text{ ont même sens} \\ * \; AE = 2 \times AB \end{cases}$$

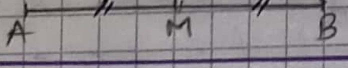
$\vec{BF} = -\frac{3}{2}\vec{BC}$ donc
$$\begin{cases} * \; F \in (BC) \\ * \; \vec{BF} \text{ et } \vec{BC} \text{ ont des sens opposés} \\ * \; BF = \frac{3}{2} \times BC \end{cases}$$



3) Vecteurs et milieu

Propo :

M milieu de $[AB]$ signifie que
$$\begin{cases} \vec{AM} = \vec{MB} = \frac{1}{2}\vec{AB} \\ \vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0} \\ \vec{MA} = -\vec{MB} \end{cases}$$



Remarque : On utilise souvent $\vec{AM} = \vec{MB}$

4) Propriétés importantes

k un nombre réel non nul

* Si $\vec{AC} = k\vec{AB}$ alors les points A, B et C sont alignés
* Si $\vec{AB} = k\vec{MN}$ alors : $(AB) // (MN)$

On dit que les deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{MN}$ sont colinéaires.

5) Exercices d'application :

⇒ **Exercice ①** : $ABCD$ un parallélogramme et E un point telque $\vec{DE} = \frac{2}{3}\vec{AB}$

Montrer que les points D, C et E sont alignés

* *Solution :* On a $ABCD$ un parallélogramme donc $\vec{AB} = \vec{DC}$

or $\vec{DE} = \frac{2}{3}\vec{AB}$

donc $\vec{DE} = \frac{2}{3}\vec{DC}$

D'où les points D, E et C sont alignés.

⇒ **Exercice ②** :

Soient ABC un triangle et E et F deux points telque : $\vec{AE} = -\frac{7}{5}\vec{BC}$ et C est le milieu du segment $[BF]$

Montrer que : $(AE) // (CF)$

* *Solution :*

On a C est le milieu de $[BF]$

donc $\vec{BC} = \vec{CF}$

or $\vec{AE} = -\frac{7}{5}\vec{BC}$

donc $\vec{AE} = -\frac{7}{5}\vec{CF}$

D'où $(AE) // (CF)$

* Partie II : La translation

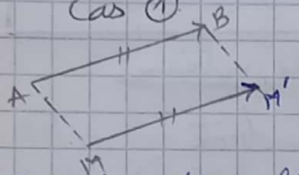
V – La translation :

1) Activité :

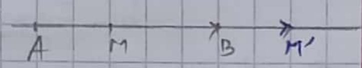
A et B et M trois points du plan

Construire dans chacun des cas le point M′ telque $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$

Cas ①



Cas ②



ABM′M est parallélogramme

Dans chacun des cas, on dit que le point M′ est l'image du point M par la translation T du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (qui transforme A en B)

2) Définition :

$\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et M un point
On dit que le point M′ est l'image du point M par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (qui transforme A en B) si $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$
càd ABM′M est un parallélogramme.

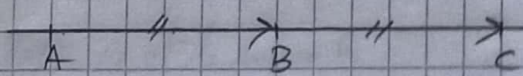
3) propriété caractéristique :

Si M′ et N′ sont les images respectives de M et N par une translation T, alors,

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$$

*** Remarque :**

Soit $T_{\overrightarrow{AB}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors, l'image de A par T est le point B et l'image de B par T est le point C telque B est le milieu du segment [AC]



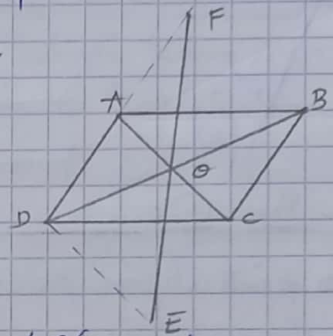
4) Exercice d'application :

ABCD un parallélogramme de centre O

1) Construire le point E image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$
2) Construire F symétrique de D par rapport à A
3) Montrer que O est milieu de [EF]

Solution :

1)



2) On a E est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$

donc $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}$

alors ACED est parallélogramme

Donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}$ ①

or F est le symétrique de D par rapport à A

donc A est milieu de [DF]

donc $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AD}$ ②

De ① et ②, on trouve que $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{CE}$

ce qui signifie que FAEC est parallélogramme de diagonales [EF] et [AC]

Comme O milieu de [AC]

Alors O est le milieu de [EF]

VI – L'image de quelques figures par une translation :

1) L'image d'une droite :

a – propo ① :

L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle.

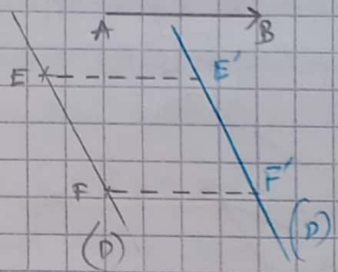
*** Remarque importante :**

Pour construire l'image d'une droite par une translation, On construit les images de deux points de cette droite par la translation

b- figure géométrique :

$\vec{AB}$ un vecteur non nul et (D) droite

Construisons (D') image de (D) par la translation de vecteur $\vec{AB}$



On a : (D) // (D')

c- Propo ② :

Les images des points alignés par une translation sont aussi alignés. On dit que la translation conserve l'alignement des points.

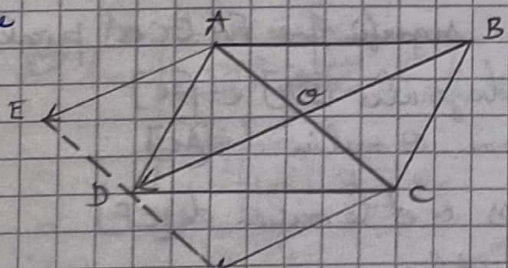
d- Exercice d'application :

ABCD parallélogramme de centre O

1) Construire E image de A par la translation de vecteur $\vec{OD}$
2) Construire F image de C par la même translation
3) Montrer que les points E, F et D alignés

Solution :

1, 2) figure



$A \xrightarrow{T} E$

$O \xrightarrow{T} D$

$C \xrightarrow{T} F$

On a les points E, D et F sont les images respectives des points A, O et C par la translation T

et on a A, O et C sont alignés

et on sait que la translation conserve l'alignement des points

Alors les points E, F et D sont alignés.

2) Image d'une demi-droite :

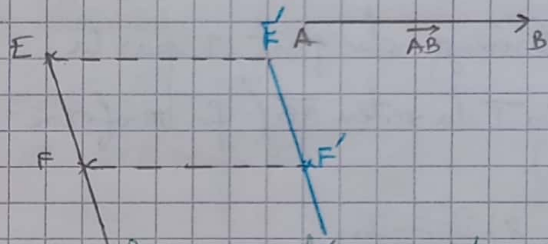
a- propo ③ :

L'image d'une demi-droite [EF) par une translation est la demi-droite [E'F') telque E' et F' sont les images respectives de E et F par la même translation et on a : (EF) // (E'F')

b- figure géométrique :

$\vec{AB}$ vecteur et [EF) demi-droite

Construisons [E'F') l'image de [EF) par la translation de vecteur $\vec{AB}$



3) Image d'un segment :

a- propo ④ :

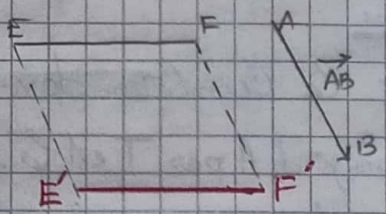
L'image d'un segment par une translation est un segment de même longueur.

On dit que la translation conserve la distance.

b- figure géométrique :

$\vec{AB}$ vecteur non nul et [EF] un segment

Construisons [E'F'] l'image de [EF] par la translation de vecteur $\vec{AB}$



On a (EF) // (E'F') et EF = E'F'

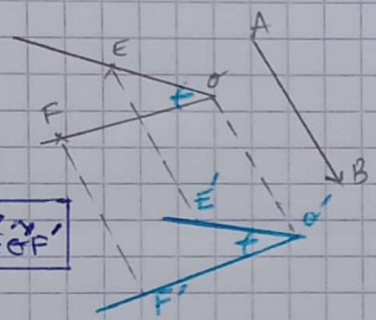
4) Image d'un angle :

a – propo ⑤ :

L'image d'un angle par une translation est un angle de même mesure.
On dit que la translation conserve la mesure des angles.

b – figure géométrique :

$\vec{AB}$ vecteur non nul et $E\hat{O}F$ un angle
Construisons l'angle $E'\hat{O'}F'$ l'image de l'angle $E\hat{O}F$ par la translation de vecteur $\vec{AB}$



On a : $\boxed{E\hat{O}F = E'\hat{O'}F'}$

5) Image d'un cercle :

a – propo ⑥ :

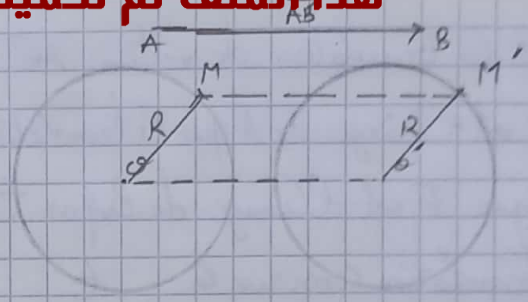
L'image du cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon R par une translation est le cercle $(\mathscr{C}')$ de centre O' l'image de O par la même translation et de même rayon R.

* **Remarque importante :**

Pour construire l'image d'un cercle par une translation, on construit l'image du centre par la même translation et on garde le même rayon.

b – figure géométrique :

$\vec{AB}$ un vecteur non nul et $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon R.
* Construisons le cercle $(\mathscr{C}')$ image du cercle $(\mathscr{C})$ par la translation du vecteur $\vec{AB}$



6) Exercice d'application :

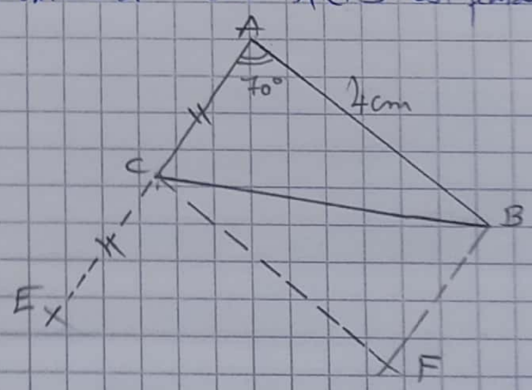
Soit ABC un triangle tel que : AB = 4 cm et $B\hat{A}C = 70°$
On considère la translation t de vecteur $\vec{AC}$
Soient E et F les images respectives des points C et B par la translation t.

1) Tracer la figure
2) Montrer que (BC) // (EF)
3) Calculer CF
4) Calculer $F\hat{C}E$

Solution :

1) La figure

On a E et F les images respectives des points C et B par la translation t
Donc $\vec{AC} = \vec{CE}$
c.à.d C est le milieu du segment [AE]
et $\vec{AC} = \vec{BF}$ c.à.d ACFB est parallélogramme



2) On a E et F sont les images respectives des points C et B par la translation t
Donc la droite (EF) est l'image de la droite (BC) par la translation t
D'où (BC) // (EF)

3) t est la translation de vecteur $\vec{AC}$
donc C est l'image de A par la translation t
et puisque F est l'image de B par t
or la translation conserve la distance

$$\begin{array}{c} A \xrightarrow{t} C \\ B \longrightarrow F \end{array}$$

donc $CF = AB$
et comme $AB = 4\,cm$ alors $\boxed{CF = 4\,cm}$

4) On a F, C et E sont les images respectives des points B, A et C par la translation t
Donc l'angle $\widehat{FCE}$ est l'image de l'angle $\widehat{BAC}$ par t

$$\begin{array}{c} B \xrightarrow{t} F \\ A \longrightarrow C \\ C \longrightarrow E \end{array}$$

et comme la translation conserve la mesure des angles, donc: $\widehat{FCE} = \widehat{BAC}$
Comme $\widehat{BAC} = 70°$ donc $\boxed{\widehat{FCE} = 70°}$