CHAPITRE 9

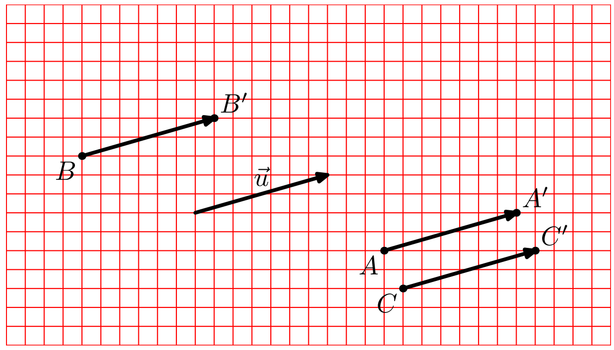
COURS : TRANSLATIONS ET VECTEURS

Extrait du programme de la classe de Troisième :

CONTENU	COMPÉTENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
Vecteurs et translations Égalité vectorielle	► Connaître et utiliser l'écriture vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ pour exprimer que la translation qui transforme A en B transforme aussi C en D.	Cette rubrique prend en compte les acquis du cycle central sur les parallélogrammes et sur la translation. Elle est orientée vers la reconnaissance, dans les couples (A,A'), (B,B'), (C,C')... de points homologues par une même translation, d'un même objet nommé vecteur. On écrira $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \dots$. L'un des objectifs est que les élèves se représentent un vecteur à partir d'une direction, d'un sens et d'une longueur.
	► Lier cette écriture vectorielle au parallélogramme $ABCD$ éventuellement aplati.	On mettra en évidence la caractérisation d'une égalité vectorielle à l'aide de milieux de $[AD]$ et $[BC]$: Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu. Si les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu, alors on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
Composition de deux translations ; somme de deux vecteurs.	► Utiliser l'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ et la relier à la composée de deux translations.	Des activités de construction conduiront à l'idée que la composée de deux translations est une translation.
	► Construire un représentant du vecteur somme à l'aide d'un parallélogramme.	À partir de ce résultat, à établir ou admettre, on définira la somme de deux vecteurs. On introduira le vecteur nul $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \dots$ ainsi que l'opposé d'un vecteur. Aucune compétence n'est exigible des élèves sur l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ ni, plus généralement, sur la soustraction vectorielle.
Composition de deux symétries centrales.	► Savoir que l'image d'une figure par deux symétries centrales successives de centres différents est aussi l'image de cette figure par une translation.	Des activités de construction permettront de conjecturer le résultat de composition de deux symétries centrales. La démonstration sera l'occasion de revoir la configuration des milieux dans un triangle.
	► Connaître le vecteur de la translation composée de deux symétries centrales.	On pourra utiliser, pour sa commodité, la notation $2\overrightarrow{AB}$ pour désigner $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$. Tout commentaire sur le produit d'un vecteur par un entier est hors programme, ainsi que la notation "o" pour désigner la composée.

1 Notion de vecteur

Définition :
Si, par une translation donnée, les points A, B, C ont pour images respectives les points A', B' et C', alors on dit que les couples de points (A, A'), (B, B'), (C, C') définissent un **vecteur**.
Si on note $\vec{u}$ ce vecteur, alors on peut écrire $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$, et on dit que $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont des **représentants** du vecteur $\vec{u}$.



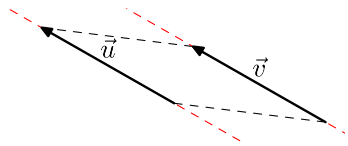
Caractéristiques d'un vecteur :
Si A et B sont deux points distincts, alors on peut entièrement déterminer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par :

- sa **direction** (celle de la droite (AB)),
- son **sens** (de A vers B)
- et sa **longueur**, ou **norme** (celle du segment $[AB]$).

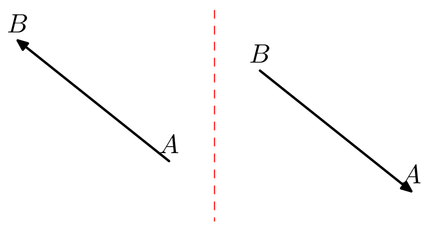
Vocabulaire : Dans ce cas, le point A est appelé **origine** du vecteur, et le point B en est l'**extrémité**.

2 Vecteurs égaux

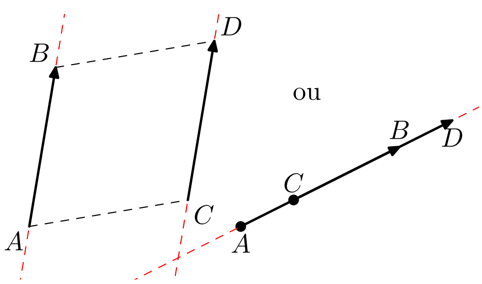
Définition :
On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **égaux** s'ils ont la **même direction**, le **même sens** et la **même longueur**.



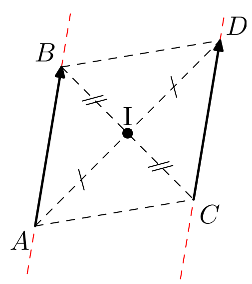
Définition :
Si A et B sont deux points distincts du plan, alors le vecteur $\overrightarrow{BA}$ a la même direction et la même longueur que le vecteur $\overrightarrow{AB}$, mais il n'a pas le même sens. On dit que $\overrightarrow{BA}$ est le vecteur **opposé** au vecteur $\overrightarrow{AB}$, et on note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.



Propriétés :
Soient A, B, C et D quatre points du plan.
▶ **Si** les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux,
alors $AB\underline{DC}$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).
▶ **Si** $AB\underline{DC}$ est un parallélogramme (éventuellement aplati), **alors** les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux (tout comme les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$).

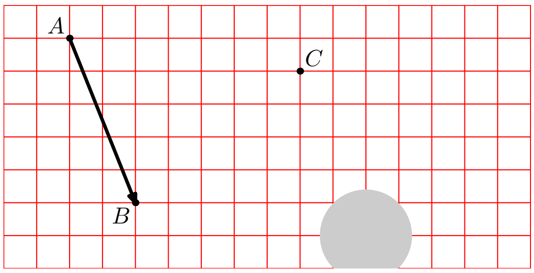


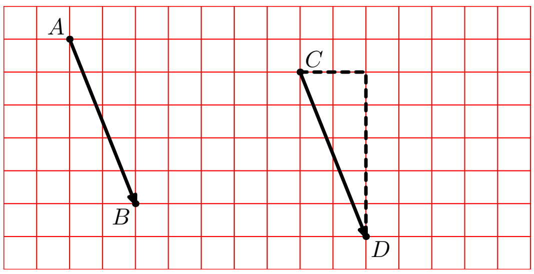
Propriétés :
Soient A, B, C et D quatre points du plan.
▶ **Si** les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux,
alors les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.
▶ **Si** les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu,
alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux (tout comme les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$).



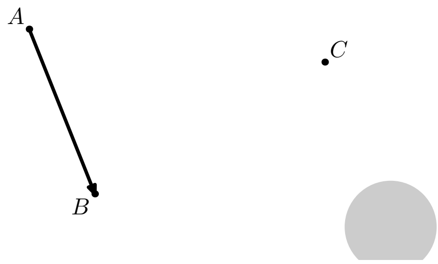
Comment placer un point défini par une égalité vectorielle :
A, B et C sont trois points du plan. On veut placer le point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

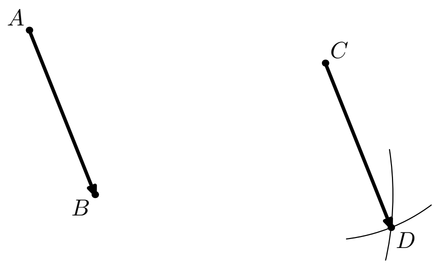
Sur un quadrillage :
On commence par repérer, à peu près, la zone dans laquelle sera situé le point D (étape 1).
Puis on utilise le quadrillage pour construire le quatrième sommet du parallélogramme $ABDC$ (étape 2) ; ici, on décale de deux carreaux vers la droite et de cinq carreaux vers le bas.



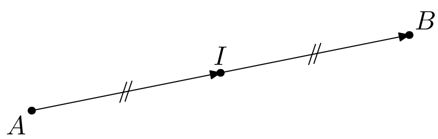


Sur du papier blanc :
On commence par repérer, à peu près, la zone dans laquelle sera situé le point D (étape 1).
Puis on utilise le compas pour construire le quatrième sommet du parallélogramme $ABDC$ (étape 2) ; ici, on trace un arc de cercle de centre C de rayon AB, puis un second arc de cercle de centre B de rayon AC.



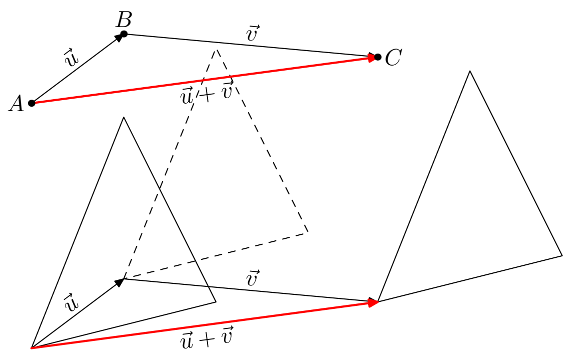


Propriété :
Soient A, I et B trois points distincts du plan.
Dire que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ revient à dire que I est le milieu de $[AB]$



3 Somme de deux vecteurs

Propriété :
La composée de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est elle-même une translation, dont le vecteur est appelé **somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$**, et est noté $\vec{u} + \vec{v}$.



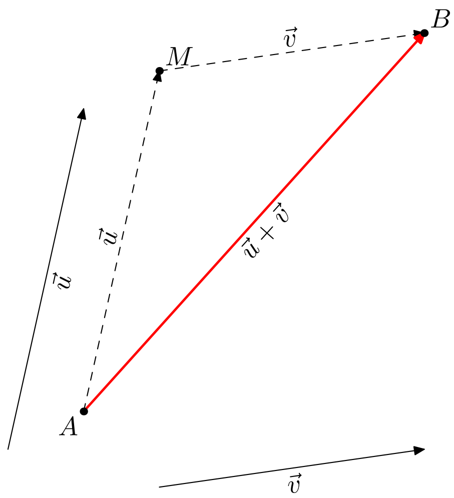
Relation de Chasles :
Si, avec les notations précédentes, $\overrightarrow{AB}$ est un représentant de $\vec{u}$, et $\overrightarrow{BC}$ est un représentant de $\vec{v}$, alors on peut écrire la relation $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, connue sous le nom de **relation de Chasles**.

Remarque : On peut retenir que "faire la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis faire la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, cela revient à faire directement la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$."

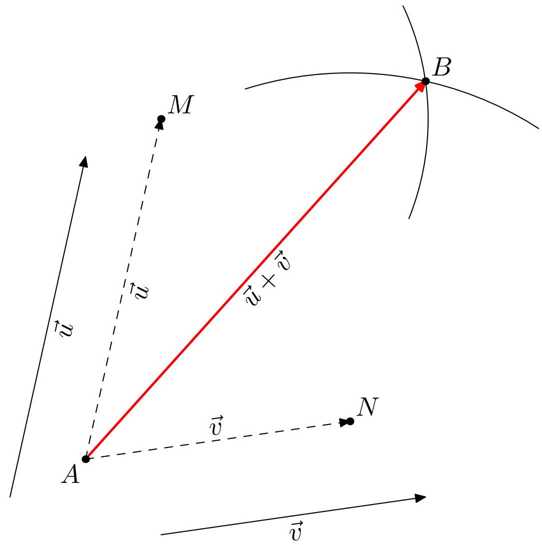
Définition :
Si A et B sont deux points distincts, on a, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$, qui correspond à un déplacement nul.
Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est par conséquent appelé **vecteur nul**, et on note $\vec{0}=\overrightarrow{AA}$.

Comment construire la somme de deux vecteurs :
A est un point du plan, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs. On veut placer le point B tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}+\vec{v}$.

En mettant les vecteurs "bout à bout" :
On construit le point M tel que $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$, puis on construit le représentant du vecteur $\vec{v}$ ayant ce point M pour origine ; un représentant du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AB}$.



En prenant des représentants de même origine :
On construit des représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'origine A, et on appelle M et N les extrémités de ces deux représentants. On construit le point B comme quatrième sommet du parallélogramme $AMBN$; un représentant du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AB}$.



4 Composée de deux symétries centrales

Propriété :
Soient A et B deux points distincts du plan. La **composée de la symétrie de centre** A **et de la symétrie de centre** B est une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$ (*que l'on notera* $2\overrightarrow{AB}$ *par analogie avec le calcul numérique*)