COURS

TRANSLATIONS ET VECTEURS

-Réalisé par :

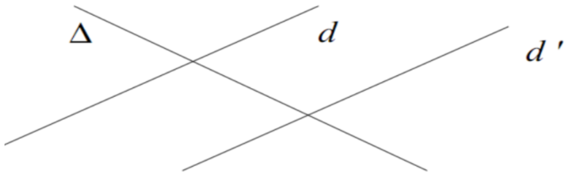
ENNASSIRI Zakaria

COURS : TRANSLATIONS ET VECTEURS

Extrait du programme de la classe de Troisième :

CONTENU	COMPÉTENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
Vecteurs et translations Égalité vectorielle	► Connaître et utiliser l'écriture vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ pour exprimer que la translation qui transforme A en B transforme aussi C en D.	Cette rubrique prend en compte les acquis du cycle central sur les parallélogrammes et sur la translation. Elle est orientée vers la reconnaissance, dans les couples (A, A'), (B, B'), (C, C')... de points homologues par une même translation, d'un même objet nommé vecteur. On écrira $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \ldots$. L'un des objectifs est que les élèves se représentent un vecteur à partir d'une direction, d'un sens et d'une longueur.
	► Lier cette écriture vectorielle au parallélogramme $ABCD$ éventuellement aplati.	On mettra en évidence la caractérisation d'une égalité vectorielle à l'aide de milieux de $[AD]$ et $[BC]$: Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu. Si les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu, alors on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
Composition de deux translations ; somme de deux vecteurs.	► Utiliser l'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ et la relier à la composée de deux translations.	Des activités de construction conduiront à l'idée que la composée de deux translations est une translation.
	► Construire un représentant du vecteur somme à l'aide d'un parallélogramme.	À partir de ce résultat, à établir ou admettre, on définira la somme de deux vecteurs. On introduira le vecteur nul $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots$ ainsi que l'opposé d'un vecteur. Aucune compétence n'est exigible des élèves sur l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ ni, plus généralement, sur la soustraction vectorielle.
Composition de deux symétries centrales.	► Savoir que l'image d'une figure par deux symétries centrales successives de centres différents est aussi l'image de cette figure par une translation.	Des activités de construction permettront de conjecturer le résultat de composition de deux symétries centrales. La démonstration sera l'occasion de revoir la configuration des milieux dans un triangle.
	► Connaître le vecteur de la translation composée de deux symétries centrales.	On pourra utiliser, pour sa commodité, la notation $2\overrightarrow{AB}$ pour désigner $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$. Tout commentaire sur le produit d'un vecteur par un entier est hors programme, ainsi que la notation "o" pour désigner la composée.

Objectif	Activités	Contenu de cours	Applications



Les droites d et d' sont parallèles donc elles la même direction.
Δ et d sont sécantes, donc elles n'ont pas la même direction.

Les droites d et d' sont parallèles donc elles la même direction.
Δ et d sont sécantes, donc elles n'ont pas la même direction.

I. Vecteur et translation

1.1) Direction et sens

Définition 1

Une droite définit une direction. On dit que deux droites d et d' **ont la même direction** , Lorsque d et d' sont parallèles ou confondues. Par **conséquent, si deux droites sont sécantes**, alors elles n'ont pas la même direction.

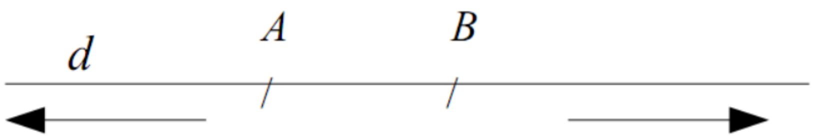
Définition 2

Soit d une droite donnée.

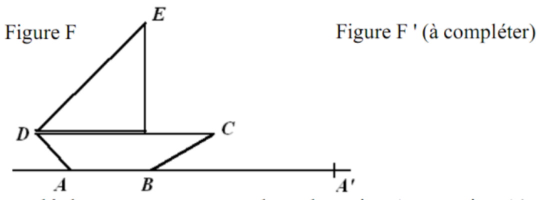
On peut définir deux sens possibles sur cette droite.

Sens 1 : *de A vers B.*

sens 2 : *de B vers A.*



Activité 1



Le voilier se déplace sur une mer calme du point A au point A'; dessiner le voilier dans sa position en A'. et tracer les chemins de chacun des points indiqués en utilisant différentes couleurs.

Que constate-t-on ?

Activité 2

1- Remarque

Attention : Le mot « **direction** » dans le langage courant se confond avec le mot « **sens** ». En mathématiques, on choisit d'abord une direction (une droite) puis on choisit un des deux sens sur cette droite.

1.2) Translation – déplacement rectiligne

Définition 1

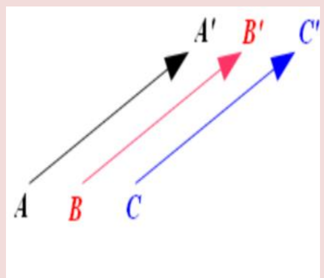
Lorsqu'on fait glisser une figure F d'un point A à un point A' sur une ligne droite sans la tourner, on déplace tous ses points sur des droites parallèles : *dans la même direction, dans le même sens et de la même longueur.*
On dit que la figure F' est l'image de la figure F par la translation qui transforme le point A en A'

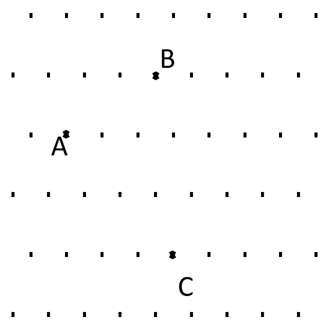
De même, le point B' est l'image de B par la translation qui transforme A en A' . Définition 1

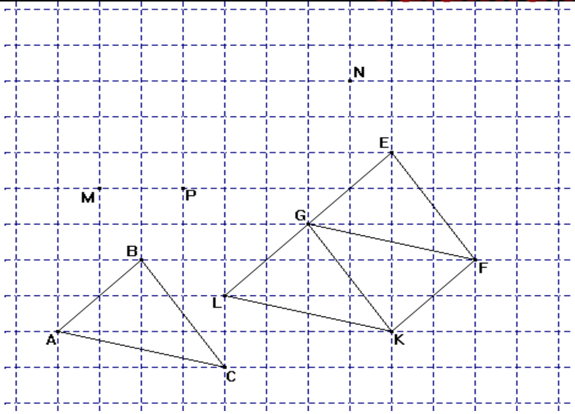
Définition 1

Les couples formés des points et de leurs images par cette translation : (A ; A'), (B; B'), (C; C'),... définissent un vecteur par la donnée :

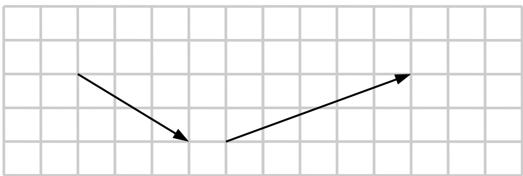
- *d'une direction : la droite (AA')*
- *d'un sens : de A vers A'*
- *d'une longueur = AA'*







1. a) Quelle est l'image du triangle ABC par la translation qui transforme M en N ?
   b) Quelle est l'image du point C par cette translation ?
2. a) Par quelle translation obtient-on le triangle 2 à partir du triangle 1 ?
   b) Placer le point P' image du point P par cette translation.
3. Tracer l'image du triangle ABC par la translation qui transforme B en K.
4. Le triangle 4 est-il l'image du triangle 3 par une translation ?



<u>Activité 3</u>

1/Compléter par oui ou non. Les vecteurs ont même :

On note ū ce vecteur associé à la translation et on écrit :

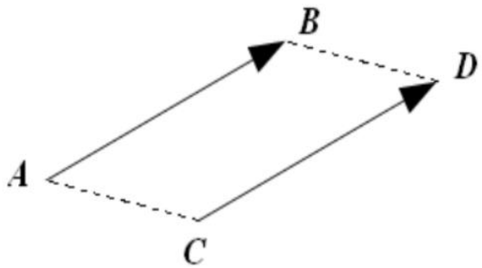
$$\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$$

1.3) Vecteurs égaux

Définition 1

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux lorsqu'ils ont la *même direction, le même sens et la même longueur.* On écrit :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$



Théorème 1 :

Soient A, B, C et D quatre points deux à deux distincts.
Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1) Le point D est l'image de C par la translation de vecteur AB

2) Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux

3) le quadrilatère ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).

<u>Application 3 :</u>

1. Tracer un triangle ABC et construire les points :

a. C' image de C par la translation qui transforme A en B.

b. A' image de A par la translation qui transforme B en C.

2. Donner deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$.

3. En déduire que C est le milieu de [A'C']

<u>Application 4 :</u>

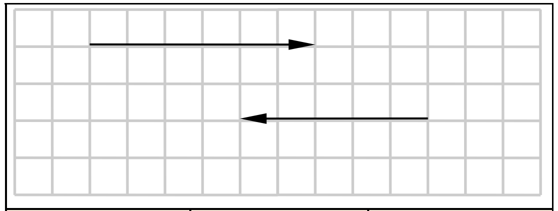
ABCD est un parallélogramme de centre O et E le point défini par $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AO}$.

1. Faire la figure.

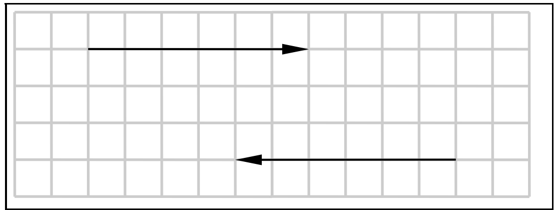
2. Démontrer que $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB}$.

3. Démontrer que $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{DC}$

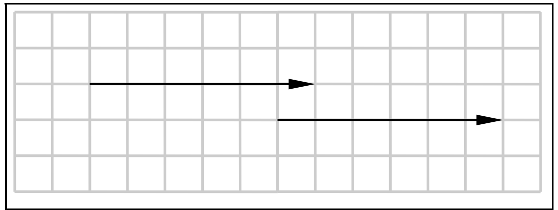
4. En déduire la nature du quadrilatère OECD.



direction	sens	longueur



direction	sens	longueur



direction	sens	longueur

Attention : ABDC et non ABCD : il faut faire le tour du quadrilatère, dans un sens ou dans l'autre.

Conséquence : Si on a une égalité vectorielle, on peut écrire trois autres égalités vectorielles (les deux autres s'obtiennent en changeant de sens) :

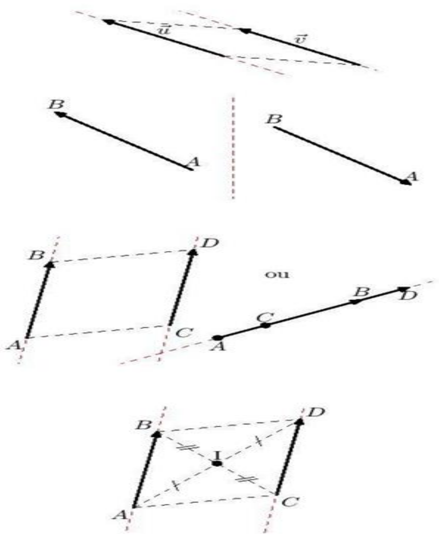
Théorème 2 :

[$\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CD}$] ssi

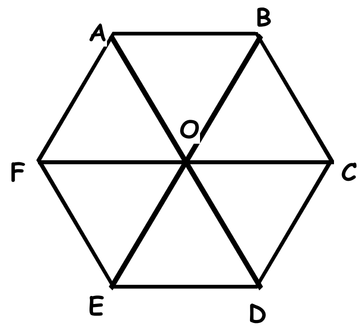
[**ABDC est un parallélogramme**]

ssi[$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$]

On peut en déduire toutes les propriétés du parallélogramme, sur les diagonales, le centre de symétrie, l'égalité des longueurs des côtés opposés



Application 5 :



Complète :

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{}$

$\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{}$

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{}$

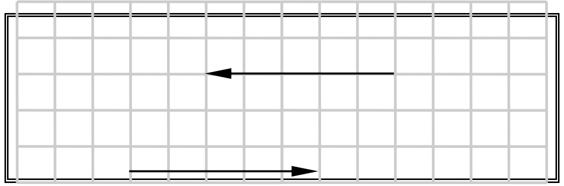
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{}$

direction	sens	longueur

2/ Compléter :
Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même ………………, même …………, même ………………..

Activité

Construire dans le cadre ci-dessous deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ égaux (avec des directions non confondues) puis noter A l'origine de premier et B son extrémité et enfin, noter C l'origine du deuxième et D son extrémité.



Compléter : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{...}$, donc le quadrilatère ……….. possède deux côtés opposés [……] et [……] qui sont ………………… et de même ……………… , c'est donc un ………………………… et on en déduit en particulier que ses ……………… [AD] et [……] ont le même ………….. .

Activité

1/Compléter par oui ou non. Les vecteurs ont

1.4) Vecteur nul

Définition 1

Un vecteur AB est nul si et seulement *si A = B.*

On a alors : $\overrightarrow{AA} = 0$

Donc : [$\overrightarrow{AB} = 0$] si et seulement si [A=B]

Remarque :
Le vecteur nul est le seul vecteur qui n'a pas de direction ni de sens

1.5) Vecteurs opposés

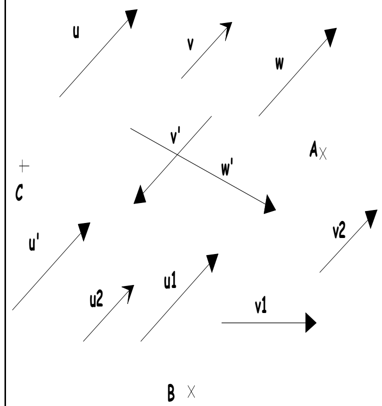
Définition 1

Deux vecteurs sont dits opposés lorsqu'ils ***ont la même direction, la même norme et des sens opposés***

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés. On écrit alors :

$$\overrightarrow{AB} = - \overrightarrow{BA}$$

Application 6 :



1°) Complète

Vecteurs qui ont la même direction que $\vec{u}$

Vecteurs qui ont le même sens que $\vec{u}$

Vecteurs qui ont la même longueur que $\vec{u}$

Vecteurs égaux au vecteur $\vec{u}$

2°)

- Trace le point A' sachant que $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$
- Trace le point B' sachant que $\overrightarrow{BB'} = \vec{w}'$
- Trace le point C' sachant

Application 7 :

Complète les cases vides

même :

direction	sens	longueur

2/ Compléter :

Deux vecteurs sont dits opposés lorsqu'ils ont la même ………., la même ……… et des sens …………

F

D

C

E

Activité

A

Construire l'image A' du point A par la translation qui transforme C en D puis l'image A'' du point A' par la translation qui transforme E en F. On dit que A'' est l'image du point A par composée de la

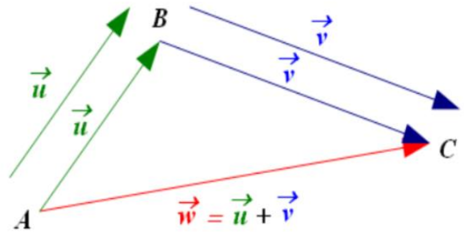
B

translation de vecteur $\overrightarrow{\cdots\cdots\cdots}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{\cdots\cdots\cdots}$.

II. Opérations sur les vecteurs

2.1) Enchaînement de deux translations

Soit t1 la translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et t2 la translation de vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$



Se déplacer de A en B, puis de B en C, revient à se déplacer de A en C . Donc, appliquer la translation t1 puis la translation t2 revient à se déplacer de A en C . On obtient une nouvelle translation.

Le vecteur associé à cette translation est $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.

Définition 1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques . Le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'appelle la somme des vecteurs ū et $\vec{v}$.

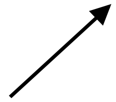
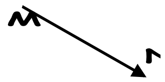
On écrit : $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

2.2) Addition de vecteurs

Comme conséquence de cette définition, on a la propriété très importante suivante Relation de Chasles : (enchaînement de vecteurs – mis bout à bout)

Quels que soient les points A, B et C du plan, on a :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Vecteur	Opposé du vecteur
$\overrightarrow{AB}$ 	
$\vec{u}$ 	
	$\overrightarrow{MN}$ 

À partir du point A, on a représenté le vecteur $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{.........}$ suivi du vecteur $\overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{.........}$

On dit que le vecteur $\overrightarrow{AA''}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{A'A''}$,

il représente la somme des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ dessinée à partir du point A.

Construire la représentation de la somme des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ dessinée à partir du point B.

$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$

$\overrightarrow{B.....} = \overrightarrow{.........} + \overrightarrow{.........} = \overrightarrow{.........} + \overrightarrow{.........}$

En représentant la somme de deux vecteur à partir de n'importe quel point on obtient le même ……….

Activité :

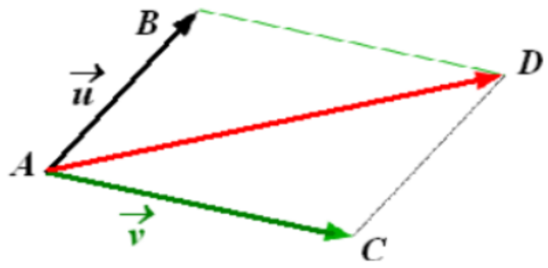
1).A, B et C désignent trois points non alignés, construire le point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

En utilisant la propriété n°1, nous pouvons écrire autrement cette propriété pour trouver le quatrième sommet d'un parallélogramme

Règle du parallélogramme : (Recherche du 4ème point, 2 vecteurs de même origine).

Quels que soient les points A, B et C du plan. Il existe un point D tel que : [***ABDC est un parallélogramme***] si et seulement si

$$[\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\ ].$$



ABDC est un parallélogramme,

alors $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Donc : $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

Remarque :

D'après la règle du parallélogramme, dans une addition, ***on peut changer l'ordre des vecteurs, la somme ne change pas.***

Théorème

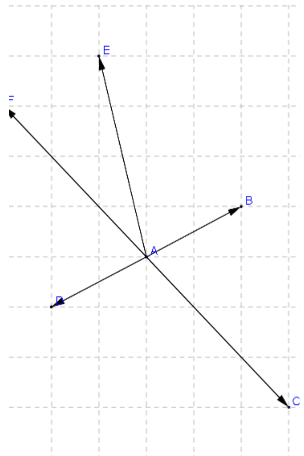
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

2.3) Soustraction de vecteurs

Application 8 :

Compléter les égalités suivantes à l'aide de la figure.



a. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = ...$

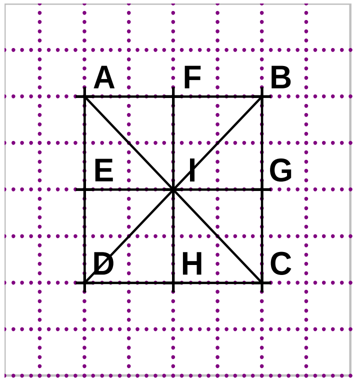
b. $\overrightarrow{AB} + ... = \overrightarrow{AE}$

c. $..... + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF}$

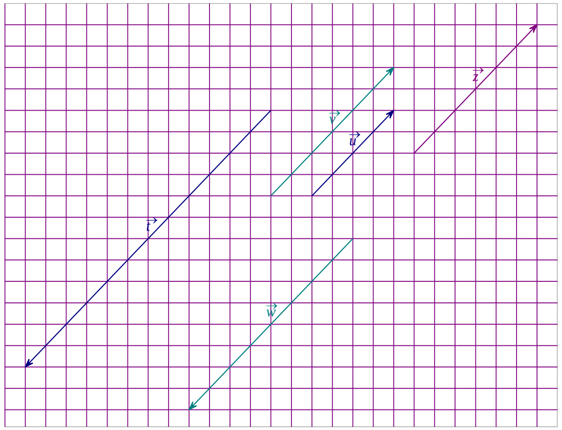
d. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = ...$

Application 9 :

En utilisant uniquement les points de la figure,

	Le quadrilatère ABCD est un………….. car ………….. Or, dans un parallélogramme, les diagonales ………….. B	**Définition** Pour soustraire un vecteur on ajoute son opposé. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques, alors : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{v} + (-\vec{u})$ $\vec{u} - \vec{v}$ <u>s'appelle la différence des vecteurs</u> $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **Exemple :** Soient A, B et C trois points du plan . Calculer $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC})$ → par définition de la soustraction $= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$ → par définition d'un vecteur opposé $= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ → on peut changer l'ordre des vecteurs $= \overrightarrow{CB}$ → d'après la relation de Chasles **2.4) Multiplication d'un vecteur par un nombre réel** **Définition** Soit $\vec{v}$ un vecteur quelconque (non nul) et k un nombre réel non nul. On appelle produit du vecteur $\vec{v}$ par le nombre réel k, le vecteur noté k $\vec{v}$ ayant : • ***la même direction que ū ;***	trouver un vecteur égal aux sommes suivantes :  **a.** $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{HC}$ **b.** $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AE}$ **c.** $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GC}$ **d.** $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{FG}$ **e.** $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CG}$ <u>**Application 10 :**</u>

Activité :



A l'aide de la figure répondre :

a. $\vec{t} = ...\vec{u}$ **b.** $\vec{v} = ...\vec{u}$

c. $\vec{w} = ...\vec{u}$ **d.** $\vec{z} = ...\vec{u}$

Activité :

Construire le vecteur $\vec{u'}$ au point A, $\vec{v'}$ au point B et $\vec{w'}$ au point C tel que :

a. $\vec{u'} = 3\vec{u}$

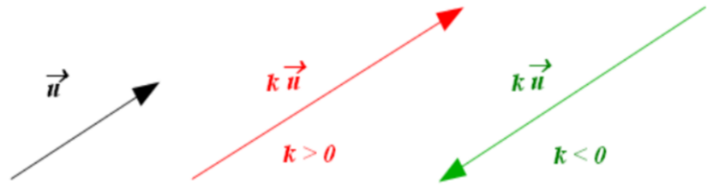
b. $\vec{v'} = -2\vec{v}$

c. $\vec{w'} = -\frac{3}{2}\vec{w}$

• le même sens si k >0; et de sens contraire si k<0;

• une norme égale à k fois la norme de $\vec{u}$ si k >0;

et à (- k) fois la norme de $\vec{u}$ si k > 0.



Remarque :

Si k = 0 ou si $\vec{u} = \vec{0}$, alors : $\vec{0}.\vec{u} = \vec{0}$ et $k.\vec{0} = \vec{0}$.

2.5) Vecteurs colinéaires

Définition

On dit que deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsqu'ils ont la même direction.

Théorème

Deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si , il existe un nombre réel k , tel que : $\vec{v} = k\vec{u}$ si et seulement si, il existe un nombre réel k' , tel que : $\vec{u} = k'\vec{u}$

Montrer dans chaque cas que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

1. $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

$\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$2\vec{u} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

$\vec{v} = 3\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{AC}$

Application 11 :

Complète :

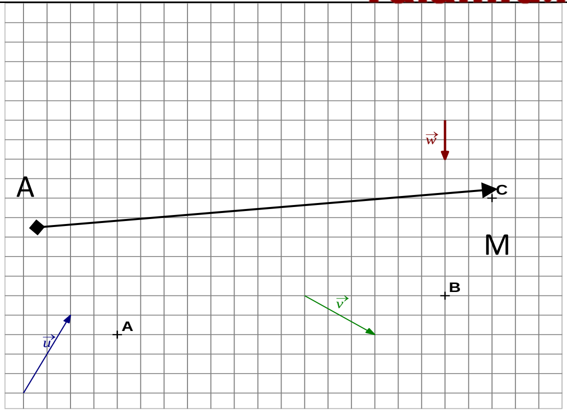
Si I est le milieu de [AB]

alors $\overrightarrow{\quad} + \overrightarrow{\quad} = \vec{0}$

Si J est le milieu de [MN]

alors $\overrightarrow{\quad} + \overrightarrow{\quad} = \vec{0}$

Si $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ alors



Activité 2 :

Construire le point B tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$:
Que peut-on dire des longueurs AM et MB ?
Peut-on en conclure que M est le milieu de [AB] ?

Prouver que A, B et M sont alignés :

Conclusion : si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, alors ....

2) Montrer que si M est le milieu de [AB], alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

III. Conséquences

3.1) parallélisme et alignement

Théorème

Soit A, B, C et D quatre points du plan. Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, si et seulement si, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Rappel. Propriété :

Si deux droites sont parallèles et ont un point commun, alors elles sont confondues. D'où la propriété importante suivante qui permet de démontrer que trois points sont alignés.

Théorème

Soient A, B, et C trois points du plan. Les trois points A, B et C sont alignés, si et seulement si, deux des trois vecteurs

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

3.2) Milieu d'un segment

Soit A, B et I trois points du plan. Le point I est le milieu du segment [AB] si et seulement si, l'une des conditions suivantes est réalisée :

1°) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ 3°) $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

2°) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ 4°) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

.... est le milieu de ....

Si $\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AS} = \vec{0}$ alors .... est le milieu de ....

Application 12 :

ABC est un triangle. I est le milieu de [AB]. Les points J et K sont définis par les égalités vectorielles :

$\overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{JA}$ et $\overrightarrow{KB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{KC}$

1) Exprimer $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

2°) Démontrer que les points I, J et K sont alignés.