

Equations du premier degré à une inconnue :

→ Définition : Toute égalité de la forme $ax+b=0$ s'appelle équation du premier degré à une inconnue x

→ Résolution d'une équation : Dans une équation, on peut transmuter un terme d'un côté vers l'autre côté à condition de changer le signe de ce terme

* Pour résoudre une condition, on place les termes inconnus dans un côté et les termes connus dans l'autre côté en appliquant la règle précédente.

Cas et techniques de résolution

Cas ① : Equation de type $ax+b=c$
L'équation $-3x+4=0$ est équivalente à
 $-3x=-4$
 $x=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$
La solution de cette équation est $\frac{4}{3}$

Cas ② : Equation de type $(ax+b)(cx+d)=0$

→ Propriété : produit nul
L'équation $(ax+b)(cx+d)=0$ est équivalente à $ax+b=0$ ou $cx+d=0$

L'équation $(2x-7)(3x+1)=0$ est équivalente à
 $2x-7=0$ ou $3x+1=0$
 $x=\frac{7}{2}$ ou $x=-\frac{1}{3}$

Les solutions de cette équation sont $-\frac{1}{3}$ et $\frac{7}{2}$

* Cas ③ : Equations fractionnaires : on réduit au même dénominateur.

* Cas ④ : Equations de type $x^2=a$: ça dépend du signe de a

* Cas ⑤ : Equations avec factorisation : si on a facteur commun ou avec identités remarquables : On applique le produit nul

* Cas ⑥ : Equations avec développement : on n'a pas un facteur commun

→ L'équation $3(2x-1)=6x+7$ est équivalente

$$\begin{aligned} 6x-3 &= 6x+7 \\ 6x-6x &= 7+3 \\ 0 &= 10 \end{aligned}$$

donc cette équation n'a pas de solutions

→ L'équation $2x+5=2(x+1)+3$ est équivalente
 $2x+5=2x+2+3$
 $2x-2x=5-5$
 $0x=0$

Donc tous les nombres réels sont solutions de cette équation

Inéquations du premier degré à une inconnue

→ Définition : Toute inégalité de la forme $ax+b \leq 0$ ou $ax+b < 0$ s'appelle inéquation du premier degré à une inconnue x .

* Remarques : Une inéquation peut contenir un des symboles $>$ ou $>$
* Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient l'inégalité.

→ Résolution des inéquations :

Cas ① : si $a > 0$

Les solutions de l'inéquation $ax+b < 0$ sont $x < -\frac{b}{a}$
On ne change pas le symbole

* L'inéquation $4x-5 < 2x+3$ est équivalente
 $4x-2x < 3+5$
 $2x < 8$
 $x < \frac{8}{2}$
 $x < 4$

Les solutions de cette inéquation sont les nombres réels inférieurs ou égaux à 4

Cas ② : si $a < 0$

Les solutions de l'inéquation $ax+b > 0$ sont $x < -\frac{b}{a}$ on change le symbole

* L'inéquation $2x-6 > x-1$ est équivalente à
 $2x-x > -1+6$
 $x > 5$
 $x < -\frac{5}{5} = -1$

tous les nombres réels strictement inférieurs à -1 sont solutions de cette inéquation.

Cas ③ : Inéquations n'admettant pas de solutions

L'inéquation $\frac{2x-5}{3} - \frac{x+1}{2} > \frac{x}{6}$ est équivalente à
 $0 > 13$
ce qui est impossible
donc cette équation n'a pas de solutions

Cas ④ : Inéquations admettant une infinité de solutions

$5(2x-1) - 7x < 3(x+1)$ est équivalente à
 $10x-5-7x < 3x+3$
 $3x-8 < 3x+3$
 $0 < 8$
ce qui est toujours vrai
tous les nombres réels sont solutions de cette inéquation.

Résolution des problèmes :

Pas de résolution de problèmes

- 1) Choix de l'inconnue
- 2) Mise en équation : transformation des données en une équation.
- 3) Résolution de l'équation
- 4) Retour au problème : vérification et réponse aux questions

Problèmes attachés aux inéquations

Lorsqu'on trouve des expressions comme au moins, au plus, moins que, plus que, meilleur que, maximal, minimal... alors on utilise les inéquations.

Cas ①: Equations de type $ax+b=c$

1) L'équation $-3x+4=0$ est équivalente à

$$\begin{aligned} -3x &= -4 \\ x &= \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

La solution de cette équation est $\frac{4}{3}$

2) $2x+5=2(x+1)+3$ est équivalente à

$$\begin{aligned} 2x+5 &= 2x+2+3 \\ 2x-2x &= 5-5 \\ 0x &= 0 \end{aligned}$$

Donc tous les nombres réels sont solutions de cette équation

3) $3(2x-1)=6x+7$ est équivalente à

$$\begin{aligned} 6x-3 &= 6x+7 \\ 6x-6x &= 7+3 \\ 0x &= 10 \end{aligned}$$

ce qui est impossible cette équation n'a pas de solution

Cas ②: Equations de type $(ax+b)(cx+d)=0$

1) L'équation $(x+1)(2x-3)=0$ est équivalente à

$$\begin{aligned} x+1 &= 0 \text{ ou } 2x-3=0 \\ x &= -1 \text{ ou } x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Cette équation admet deux solutions -1 et $\frac{3}{2}$

2) L'équation $x^2-7x=0$ est équivalente à $x(x-7)=0$

$$\begin{aligned} x &= 0 \text{ ou } x-7=0 \\ x &= 0 \text{ ou } x=7 \end{aligned}$$

Cette équation admet deux solutions 0 et 7

Cas ③: Equations fractionnaires

En général, pour résoudre ce genre d'équations, on réduit au même dénominateur.

1) L'équation $\frac{2x+1}{5} = \frac{x-1}{3}$

est équivalente à

$$\begin{aligned} 3(2x+1) &= 5(x-1) \\ 6x+3 &= 5x-5 \\ 6x-5x &= -5-3 \\ x &= -8 \end{aligned}$$

La solution de cette équation est -8

2) L'équation $\frac{2x+1}{5} - 2 = \frac{x-1}{3}$

est équivalente à

$$\begin{aligned} \frac{3(2x+1) - 30}{15} &= \frac{5(x-1)}{15} \\ 6x+3-30 &= 5x-5 \\ 6x-5x &= -5-3+30 \\ x &= 22 \end{aligned}$$

La solution de cette équation est 22

Cas ④: Equations de type $x^2=a$

Si $a > 0$ on utilise l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

1) L'équation $x^2+12=2x$ est équivalente à

$$\begin{aligned} x^2 &= 2x-12 \\ x^2 &= -10 \end{aligned}$$

donc cette équation n'a pas de solution

2) $(2x-1)^2-9=0$ est équivalente à

$$\begin{aligned} (2x-1)^2-3^2 &= 0 \\ (2x-1-3)(2x-1+3) &= 0 \\ (2x-4)(2x+2) &= 0 \\ 2x-4=0 \text{ ou } 2x+2=0 \\ x=\frac{4}{2}=2 \text{ ou } x=\frac{-2}{2}=-1 \end{aligned}$$

cette équation admet deux solutions -1 et 2

Cas ⑤: Equation avec factorisation si on a un facteur commun (peut être double)

1) $2x(x+\sqrt{2})-\sqrt{3}(x+\sqrt{2})=0$ est équivalente à

$$\begin{aligned} (x+\sqrt{2})(2x-\sqrt{3}) &= 0 \\ x+\sqrt{2}=0 \text{ ou } 2x-\sqrt{3}=0 \\ x &= -\sqrt{2} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

cette équation admet deux solutions $-\sqrt{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $x^2+6x+9=0$ est équivalente à

$$\begin{aligned} x^2+2x \times 3+3^2 &= 0 \\ (x+3)^2 &= 0 \\ x+3 &= 0 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

cette équation admet unique solution -3

3) $25x^2-30x+9=0$ est équivalente à

$$\begin{aligned} (5x)^2-2 \times 5x \times 3+3^2 &= 0 \\ (5x-3)^2 &= 0 \\ 5x-3 &= 0 \\ 5x &= 3 \\ x &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

La solution de cette équation est $\frac{3}{5}$

4) $(x-1)(x+3)+x^2-1=0$ est équivalente à

$$\begin{aligned} (x-1)(x+3) + (x-1)(x+1) &= 0 \\ (x-1)(x+3+x+1) &= 0 \\ (x-1)(2x+4) &= 0 \\ x-1=0 \text{ ou } 2x+4=0 \\ x &= 1 \text{ ou } x = \frac{-4}{2} = -2 \end{aligned}$$

cette équation admet deux solutions -2 et 1

Cas ⑥: Equations avec développement si on n'a pas un facteur commun

1) $x(x+3)=x^2-15$ est équivalente à

$$\begin{aligned} x^2+3x &= x^2-15 \\ x^2+3x-x^2 &= -15 \\ x &= \frac{-15}{3} \\ x &= -5 \end{aligned}$$

La solution de cette équation admet unique solution -5

2) $2(3x+5)-3x=12-(2-4x)$

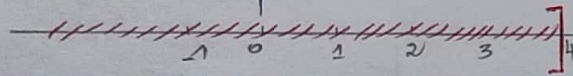
$$\begin{aligned} 6x+10-3x &= 12-2+4x \\ 6x-3x-4x &= 12-2-10 \\ -x &= -8 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

La solution de cette équation est 8

Cas ①: Si $a > 0$ alors les solutions de l'inéquation $ax + b < 0$ sont $x < \frac{-b}{a}$. On ne change pas le symbole

L'inéquation $4x - 5 \leq 2x + 3$ est respectivement équivalente à
 $4x - 2x \leq 3 + 5$
 $2x \leq 8$
 $x \leq \frac{8}{2}$ On ne change pas l'ordre
 $x \leq 4$

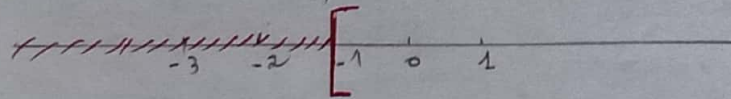
Donc tous les nombres réels inférieurs ou égaux à 4 sont solutions de cette inéquation



Cas ②: Si $a < 0$ alors les solutions de l'inéquation $ax + b < 0$ sont $x > \frac{-b}{a}$. On change le symbole

L'inéquation $2x - 6 > 7x - 1$ est respectivement équivalente à
 $2x - 7x > -1 + 6$
 $-5x > 5$
 $x < \frac{5}{-5}$
 $x < -1$

Donc tous les nombres réels strictement inférieurs à -1 sont solutions de cette inéquation.



Cas ③: Inéquations n'admettant pas de solutions

L'inéquation $\frac{2x-5}{3} - \frac{x+1}{2} \geq \frac{x}{6}$ est respectivement équivalente à
 $\frac{2(2x-5) - 3(x+1)}{6} \geq \frac{x}{6}$

$$4x - 10 - 3x - 3 \geq x$$

$$4x - 3x - x \geq 10 + 3$$

$$0 \geq 13$$

ce qui est impossible. Donc cette inéquation n'admet pas de solution

Cas ④: Inéquations admettant une infinité de solutions

L'inéquation $5(2x-1) - 7x < 3(x+1)$ est respectivement équivalente à
 $10x - 5 - 7x < 3x + 3$
 $10x - 7x - 3x < 3 + 5$
 $0x < 8$

ce qui est toujours vrai. Donc tous les nombres réels sont solutions de cette inéquation.

Problèmes attachés aux inéquations

Pour résoudre un problème attaché à une inéquation, on suit les étapes suivantes:

- 1) Choix d'inconnue
- 2) Mise en inéquation: transformation des données en inéquation.
- 3) Résolution de l'inéquation.
- 4) Retour au problème: Réponse au questions.

* Remarques

Lorsque l'on emploie au problème des expressions comme: au moins, au plus, moins que, plus que, meilleur que, maximal, minimal... ; alors on travaille avec les inéquations.