

Chapitre 2: Equations et inéquations

I. Equations du premier degré à une inconnue:

1) Définition:

Sont a, b et x des nombres réels.

Toute égalité de la forme: $ax + b = 0$

s'appelle équation du premier degré à une inconnue x .

2) Exemples:

Toutes les égalités $2x + 3 = 0$ et $\sqrt{2}x - \frac{1}{2} = 0$
 $-7x - 5 = 4$ et $2x + 8 = \sqrt{3}x + 1$
 s'appellent des équations du premier degré à une inconnue x .

* Remarque:

→ Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs possibles de l'inconnue qui vérifient l'équation (s'ils existent)

→ chacune de ces valeurs est appelée solution de l'équation.

3) Résolution d'une équation du premier degré à une inconnue.

a. Règle:

→ Dans une équation, on peut transmuter un terme d'un côté vers l'autre côté à condition de changer le signe de ce terme.
 → Pour résoudre une équation, on place les termes inconnus dans un côté et les termes connus dans l'autre côté en appliquant la règle précédente.

b. Cas et techniques de résolution:

Cas ①: Equation de type $ax + b = c$

1) L'équation $-3x + 4 = 0$ est respectivement équivalente à $-3x = -4$

$$x = \frac{-4}{-3} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

Donc cette équation admet une unique solution $\frac{4}{3}$

2) L'équation $5(x+1) = 2x-1$ est respectivement équivalente à

$$5x + 5 = 2x - 1$$

$$5x - 2x = -1 - 5$$

$$3x = -6$$

$$x = \frac{-6}{3} = -2$$

Donc cette équation admet une unique solution -2

3) L'équation $2x + 5 = 2(x+1) + 3$ est respectivement équivalente à

$$2x + 5 = 2x + 2 + 3$$

$$2x - 2x = 5 - 5$$

$$0x = 0$$

Donc tous les nombres réels sont solutions de cette équation.

4) L'équation $3(2x-1) = 6x+7$ est respectivement équivalente à

$$6x - 3 = 6x + 7$$

$$6x - 6x = 7 + 3$$

$$0x = 10$$

ce qui est impossible

Donc cette équation n'admet pas de solution

Cas ②: Equation de type $(ax+b)(cx+d)=0$

* Prop: Le produit nul

Les solutions de l'équation $(ax+b)(cx+d)=0$ sont les solutions des équations

$$ax+b=0 \text{ et } cx+d=0$$

1) L'équation $(x+1)(2x-3)=0$ est respectivement équivalente à

$$x+1=0 \text{ ou } 2x-3=0$$

$$x=-1 \text{ ou } 2x=3$$

$$x=-1 \text{ ou } x=\frac{3}{2}$$

Donc cette équation admet deux solutions

$$-1 \text{ et } \frac{3}{2}$$

2) L'équation $x^2-7x=0$ est respectivement équivalente à

$$x(x-7)=0$$

$$x=0 \text{ ou } x-7=0$$

$$x=0 \text{ ou } x=7$$

Donc cette équation admet deux solutions 0 et 7.

Cas ③ : Équation fractionnaires

Règle : Pour résoudre ce type d'équation, on réduit au même dénominateur.

1) L'équation $\frac{2x+1}{5} = \frac{x-1}{3}$ est respectivement équivalente à

$$3(2x+1) = 5(x-1)$$

$$6x+3 = 5x-5$$

$$6x-5x = -5-3$$

$$x = -8$$

Donc cette équation admet unique solution -8

2) L'équation $\frac{2x+1}{5} - 2 = \frac{x-1}{3}$ est respectivement équivalente à

$$\frac{3(2x+1)-30}{15} = \frac{5(x-1)}{15}$$

$$6x+3-30 = 5x-5$$

$$6x-5x = -5-3+30$$

$$x = 22$$

Donc cette équation admet une unique solution 22

* Cas ④ : Équations de type $x^2=a$

Remarque Pour résoudre ce type d'équation

On rappelle l'identité ③ : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

* Propo : Les solutions de l'équation $x^2=a$

- si $a=0$, l'équation admet une unique solution 0

- si $a>0$, l'équation admet deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

- Si $a<0$, alors cette équation n'admet pas de solutions.

1) L'équation $x^2+12=2$ est respectivement équivalente à $x^2=2-12$

$$x^2=-10$$

Donc cette équation n'admet pas de solution

2) L'équation $(2x-1)^2-9=0$ est respectivement équivalente à

$$(2x-1)^2-3^2=0$$

$$(2x-1-3)(2x-1+3)=0$$

$$(2x-4)(2x+2)=0$$

$$2x-4=0 \text{ ou } 2x+2=0$$

$$2x=4 \text{ ou } 2x=-2$$

$$x=\frac{4}{2}=2 \text{ ou } x=\frac{-2}{2}=-1$$

Donc cette équation admet deux solutions -1 et 2

* Cas ⑤ : Équations avec factorisation si on a facteur commun ou avec identités remarquables

* L'équation $2x(x+\sqrt{2})-\sqrt{3}(x+\sqrt{2})=0$ est respectivement équivalente à

$$(x+\sqrt{2})(2x-\sqrt{3})=0$$

$$x+\sqrt{2}=0 \text{ ou } 2x-\sqrt{3}=0$$

$$x=-\sqrt{2} \text{ ou } x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc cette équation admet deux solutions $-\sqrt{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$

* Suite (Regardez la suite)

* Cas ⑤: Résolution d'une équation avec développement si on a les parenthèses et pas de facteur commun.

* L'équation $x(x+3) = x^2 - 15$ est respectivement équivalente à

$$x^2 + 3x = x^2 - 15$$

$$x^2 + 3x - x^2 = -15$$

$$x = \frac{-15}{3} = -5$$

Donc cette équation admet une unique solution -5

II - Résolution des problèmes :

1) Mise en équation de problèmes :

a - Règle :

Les étapes de résolution d'un problème sont :

- 1) Choix de l'inconnue
- 2) Mise en équation : Transformation des données en une équation.
- 3) Résolution de l'équation.
- 4) Retour au problème : vérification et réponse au question.

2) Exemple :

La somme des âges de Aziz, de sa mère et de sa grand-mère est 90 ans. L'âge de la grand-mère est le double de l'âge de la mère et l'âge de Aziz est le tiers de celui de sa mère.

Quel est l'âge de chacun?

⇒ Solution :

1) Choix de l'inconnue

Soit x l'âge de la mère

2) Mise en équation :

* L'âge de la mère est x

* L'âge de la grand-mère est $2x$ car c'est le double de l'âge de la mère

* L'âge de Aziz est $\frac{x}{3}$ car c'est le

tiers de l'âge de la mère.

et puisque de leurs âges est 90 ans, alors l'équation est : $x + 2x + \frac{x}{3} = 90$

3) Résolution de l'équation :

L'équation $x + 2x + \frac{x}{3} = 90$ est respectivement équivalente à

$$\frac{3x + 6x + x}{3} = \frac{270}{3}$$

$$10x = 270$$

$$x = \frac{270}{10} = 27$$

Donc la solution de cette équation est 27

4) Retour au problème :

On a $27 + 2 \times 27 + \frac{27}{3} = 27 + 54 + 9 = 90$

Donc la solution est vraie

* L'âge de la mère est : 27 ans

* L'âge de la grand-mère est 54 ans

* L'âge de Aziz est : 9 ans

III - Inéquations du premier degré à une inconnue :

1) Définition :

Soient a, b, x des nombres réels

Toute inégalité de la forme $ax + b > 0$ ou $ax + b \geq 0$ ou $ax + b < 0$ ou $ax + b \leq 0$ s'appelle inéquation du premier degré à une inconnue x .

* Remarques :

→ Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient l'inégalité.

2) Exemples :

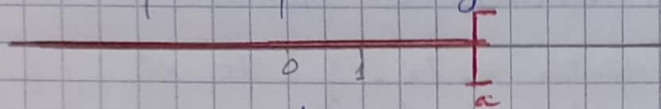
* Les inégalités $2x + 5 < 0$ et $\sqrt{2}x - 7 \geq 0$ et

$$3x + 7 \geq \frac{2}{3}x - 14$$

sont des inéquations du premier degré à une inconnue x

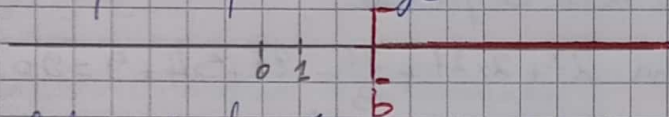
3) Représentation des solutions d'une inéquation sur une droite graduée :

* On représente l'écriture $x < a$ sur la droite par la partie rouge



a ne fait pas partie des réels x qui vérifient $x < a$.
Le crochet est orienté dans le sens opposé des solutions.

* On représente l'écriture $x > b$ sur la droite par la partie rouge



b fait partie des réels x qui vérifient $x > b$.
Le crochet est orienté dans le sens des solutions.

$$x \leq -2$$

$$x \geq -2$$

$$x < -2$$

$$x > -2$$

$$x \leq -2$$

$$x \geq -2$$

4) Résolution des inéquations

* Cas ① : Si $a > 0$, alors les solutions de l'inéquation $ax + b < 0$ est $x < -\frac{b}{a}$.
(On change pas le symbole)

→ L'inéquation $4x - 5 \leq 2x + 3$ est respectivement équivalente à

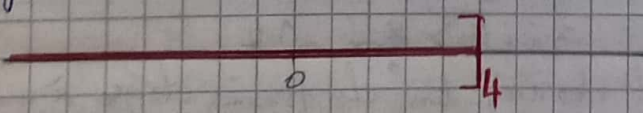
$$4x - 2x \leq 3 + 5$$

$$2x \leq 8$$

$$x \leq \frac{8}{2}$$

$$x \leq 4$$

Donc tous les nombres réels inférieurs ou égaux à 4 sont solutions de cette inéquation



* Cas ② : Si $a < 0$, alors les solutions de l'inéquation $ax + b < 0$ sont $x > -\frac{b}{a}$.
On inverse le symbole.

→ L'inéquation $2x - 6 > 7x - 1$ est respectivement équivalente à

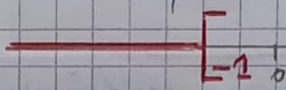
$$2x - 7x > -1 + 6$$

$$-5x > 5$$

$$x < \frac{5}{-5}$$

$$x < -1$$

Donc tous les nombres réels strictement inférieurs à -1 sont solutions de cette inéquation.



* Cas ③ : Inéquations n'admettant pas de solutions.

→ L'inéquation $\frac{2x-5}{3} - \frac{x+2}{2} \geq \frac{x}{6}$ est respectivement équivalente à

$$\frac{2(2x-5) - 3(x+2)}{6} \geq \frac{x}{6}$$

$$4x - 10 - 3x - 6 \geq x$$

$$4x - 3x - x \geq 10 + 6$$

$$0 \geq 16$$

ce qui est impossible

Donc cette inéquation n'admet pas de solution.

* Cas ④ : Inéquations admettant une infinité de solutions.

→ L'inéquation $5(2x-1) - 7x < 3(x+1)$ est respectivement équivalente à

$$10x - 5 - 7x < 3x + 3$$

$$10x - 7x - 3x < 3 + 5$$

$$0 < 8$$

ce qui est vrai

Donc tous les nombres réels sont solutions de cette inéquation.

5) Problème et inéquations

a) Règle

Pour résoudre un problème attaché à une inéquation, on résout soit les étapes suivantes :

1) Choix de l'inconnue

2) Mise en inéquation : Transformation des données en une inéquation

3) Résolution de l'inéquation

4) Retour au problème : Vérification et réponse aux questions.

Remarque : Lorsque l'on emploie au problème des expressions comme (au moins - au plus - moins que - plus que - meilleur que - Maximal - minimal ...) alors on utilise les inéquations

b) Exemples

Une agence de location de voitures propose deux tarifs :

- Tarif A : Un forfait de 60 DH plus 0,20 DH par kilomètre parcouru

- Tarif B : 0,8 DH par kilomètre parcouru.

A partir de quelle distance (en km) le

Tarif A est plus avantageux (moins cher) pour le client ?

* Solution :

→ Choix de l'inconnue :

Soit x la distance parcourue par le client.

→ Mise en inéquation :

* Pour le Tarif A, le client doit payer (en DH) $60 + 0,2x$

* Pour le Tarif B, le client doit payer (en DH) $0,8x$

Le Tarif A est plus avantageux que le Tarif B signifie que $60 + 0,2x < 0,8x$

→ Résolution de l'inéquation

L'inéquation $60 + 0,2x < 0,8x$ est respectivement équivalente à

$$0,2x - 0,8x < -60$$

$$-0,6x < -60$$

$$(\text{car } -0,6 < 0) \quad x > \frac{-60}{-0,6}$$

$$x > 100$$

→ Retour au problème

A partir de 100 km, le Tarif A est plus avantageux que le Tarif B

Suite : Equations (ex 5) :

* L'équation $x^2 - 6x + 9 = 0$ est équivalente à

$$x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 0$$

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

alors cette équation admet une unique solution 3

* L'équation $25x^2 + 30x + 9 = 0$ est

équivalente à $(5x)^2 + 2 \times 5x \times 3 + 3^2 = 0$

$$(5x + 3)^2 = 0$$

$$5x + 3 = 0$$

$$x = -\frac{3}{5}$$

alors cette équation admet une unique solution $-\frac{3}{5}$

* L'équation $(x-1)(x+3) + x^2 - 1 = 0$ est équivalente à

$$(x-1)(x+3) + (x-1)(x+1) = 0$$

$$(x-1)(x+3+x+1) = 0$$

$$(x-1)(2x+4) = 0$$

$$x-1=0 \text{ ou } 2x+4=0$$

$$x=1 \text{ ou } x = \frac{-4}{2} = -2$$

cette équation admet deux solutions -2 et 1