ANGLES INSCRITS, ANGLES AU CENTRE ET POLYGONES REGULIERS

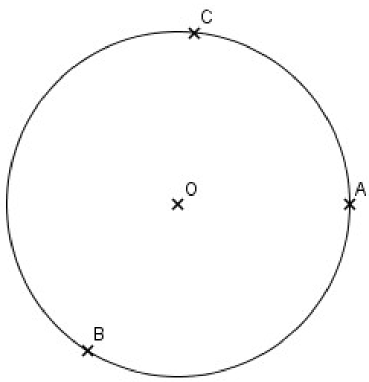
I) ANGLES INSCRITS - ANGLES AU CENTRE

A) Angles inscrits

Définition

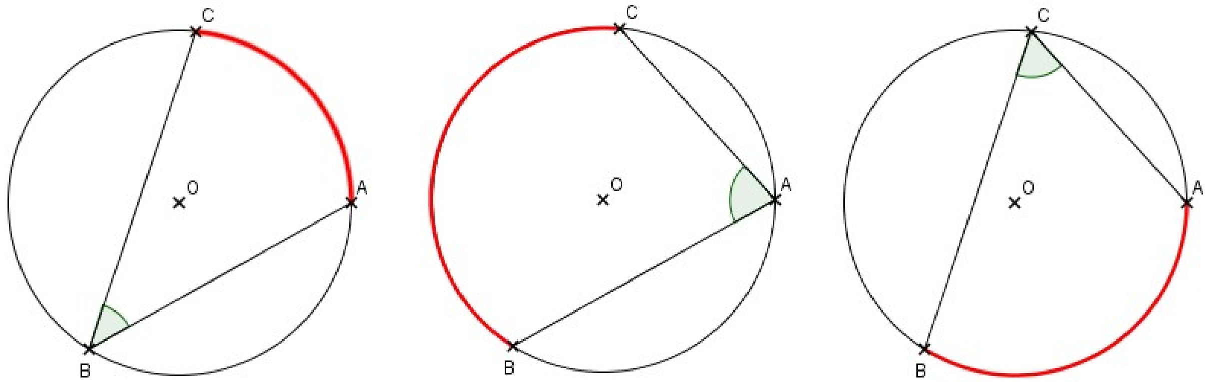
Considérons un cercle $\mathcal{C}$.
Un **angle inscrit** dans $\mathcal{C}$ est un angle dont le sommet appartient à $\mathcal{C}$ et qui intercepte un arc de ce cercle .

Exemple 1
Soit trois points A, B et C appartenant au cercle $\mathcal{C}$.



Voici quelques exemples d'angles inscrits :

(1) : L'angle inscrit $\widehat{ABC}$ qui intercepte l'arc de cercle $\overset{\frown}{AC}$.
(2) : L'angle inscrit $\widehat{BAC}$ qui intercepte l'arc de cercle $\overset{\frown}{BC}$.
(3) : L'angle inscrit $\widehat{BCA}$ qui intercepte l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$.



(1) (2) (3)

B) Angles au centre

Définition

Dans le cercle $\mathcal{C}$, un **angle au centre** est un angle dont le sommet est le centre du cercle $\mathcal{C}$.

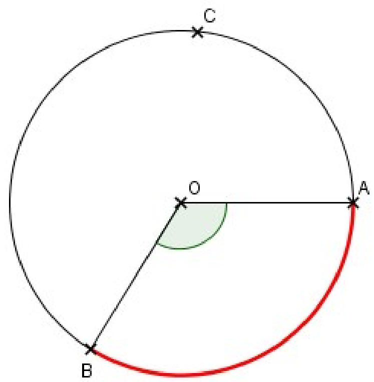
Exemple 2

En reprenant le même cercle que précédemment, voici quelques exemples d'angles au centre :

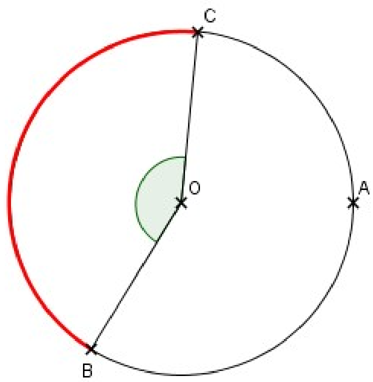
(1) : L'angle au centre $\widehat{AOB}$ qui intercepte l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$.

(2) : L'angle au centre $\widehat{BOC}$ qui intercepte l'arc de cercle $\overset{\frown}{BC}$.

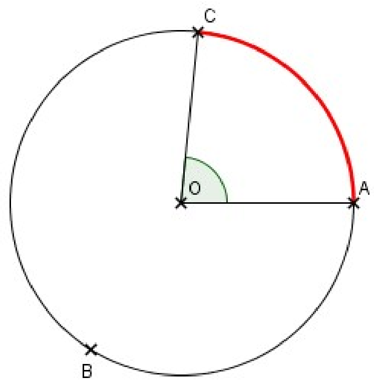
(3) : L'angle au centre $\widehat{AOC}$ qui intercepte l'arc de cercle $\overset{\frown}{AC}$.



(1)



(2)



(3)

C) Propriétés

Propriété

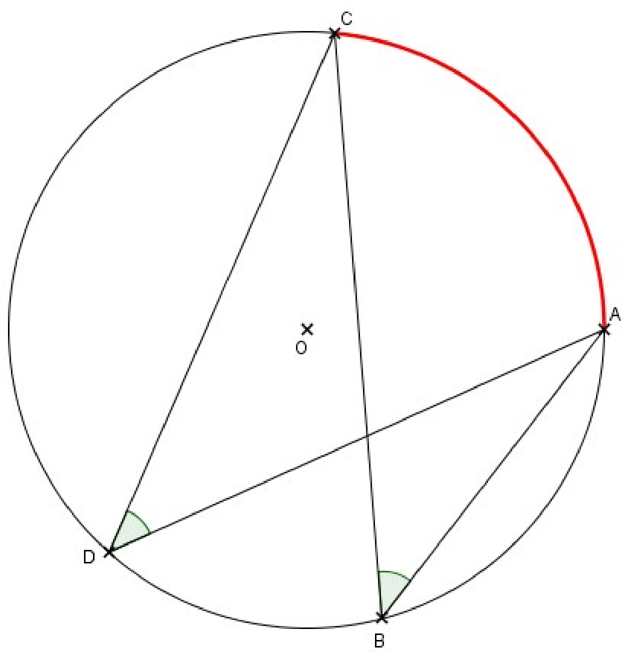
Dans un cercle, si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils sont de même mesure.

Exemple 3 :

Soit le cercle de centre O. A, B, C et D sont quatre points de ce cercle.

Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ interceptent le même arc de cercle $\overset{\frown}{AC}$ (tracé en rouge), donc ils sont de même mesure : $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$.

On peut aussi remarquer que les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ interceptent le même arc de cercle $\overset{\frown}{BD}$ (tracé en rouge), donc ils sont de même mesure : $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$.



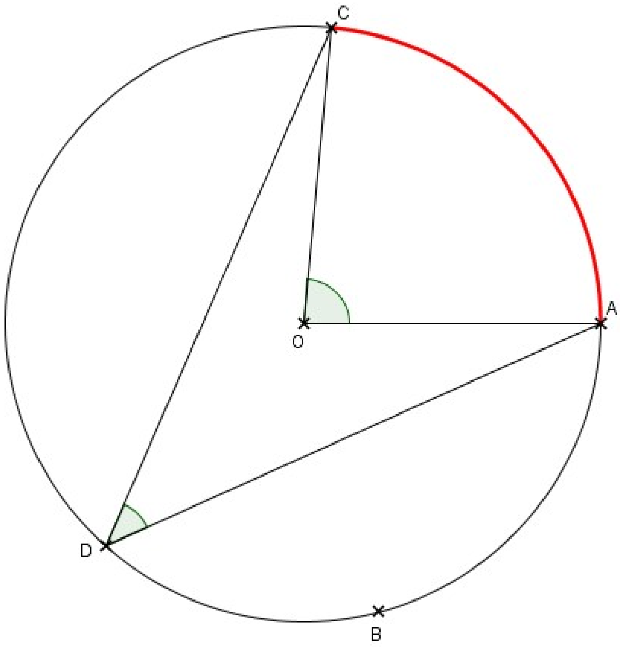
Propriété

Dans un cercle, si un angle au centre intercepte le même arc de cercle qu'un angle inscrit, alors sa mesure est le double de celle de l'angle inscrit.

Exemple 4 :

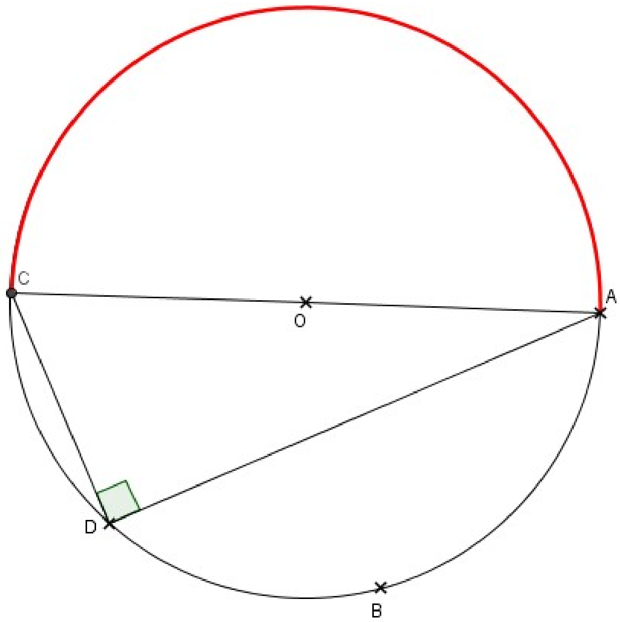
Soit le cercle de centre O. A, B, C et D sont quatre points de ce cercle.

L'angle au centre $\widehat{AOC}$ intercepte le même arc de cercle $\overset{\frown}{AC}$ que l'angle inscrit $\widehat{ADC}$ donc nous avons $\widehat{AOC} = 2 \times \widehat{ADC}$.



Propriété

Soit [AC] un diamètre du cercle et D un point de ce cercle. Alors le triangle ADC est rectangle en D.



Démonstration :

L'angle inscrit $\widehat{CDA}$ intercepte le même arc de cercle $\overset{\frown}{AC}$ que l'angle au centre $\widehat{COA}$ donc nous avons $\widehat{COA} = 2 \times \widehat{CDA}$. Comme les points A, O et C sont alignés, nous avons $\widehat{AOC} = 180°$. On en déduit que l'angle $\widehat{ADC}$ mesure 90°, c'est-à-dire que le triangle ADC est rectangle en D.

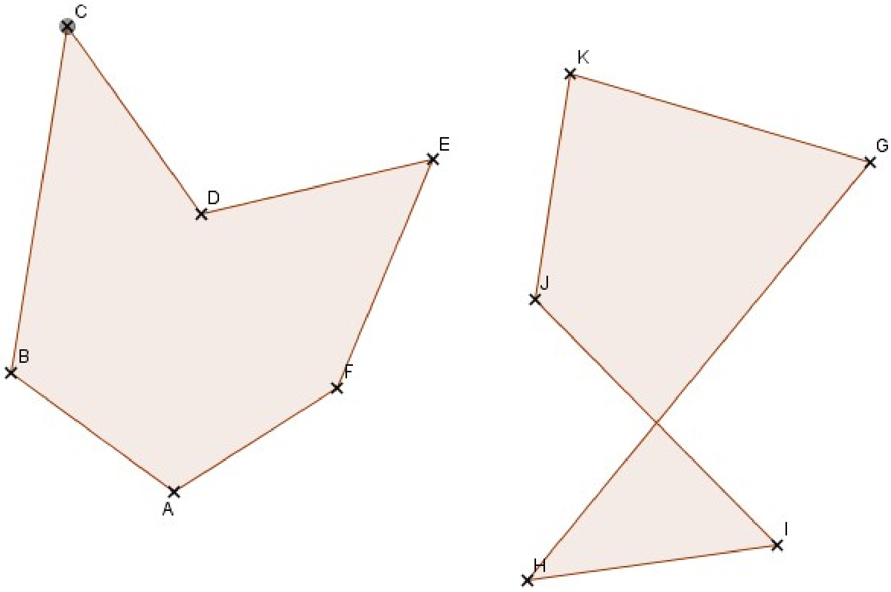
II) POLYGONES REGULIERS

A) Définitions

Définition

Un polygone est une figure fermée délimitée par des segments consécutifs appelés côtés du polygone.
On dit qu'un polygone est **croisé** si au moins deux côtés non consécutifs sont sécants. On dit qu'un polygone est **simple** si l'intersection de deux côtés consécutifs se réduit à un sommet.

Exemple 5 :

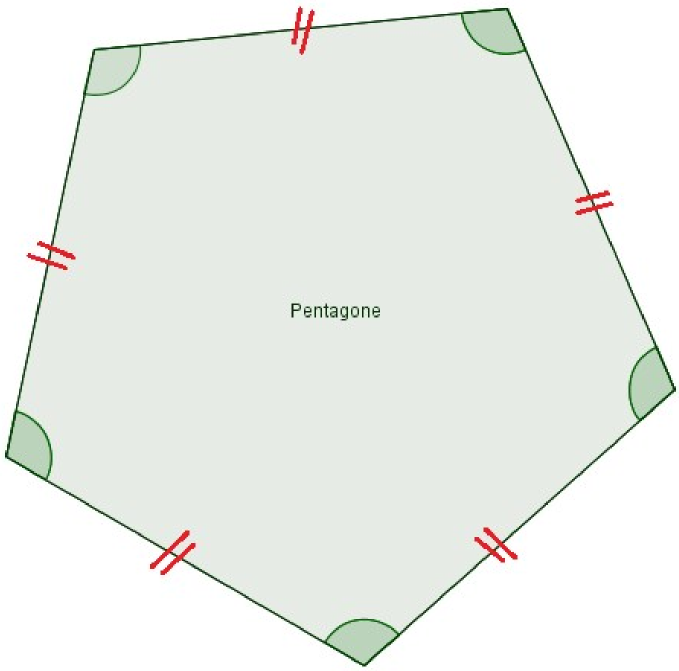


Le polygone ABCDEF est simple. Le polygone GHIJK est croisé : en effet, les côtés [GH] et [IK] qui ne sont pas consécutifs se coupent en un point.

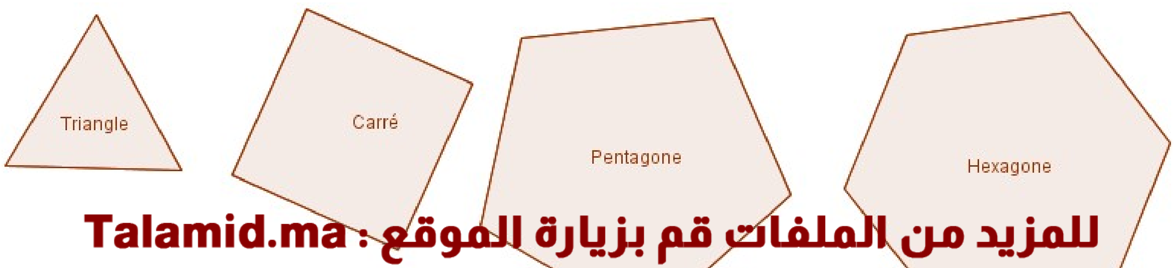
Définition

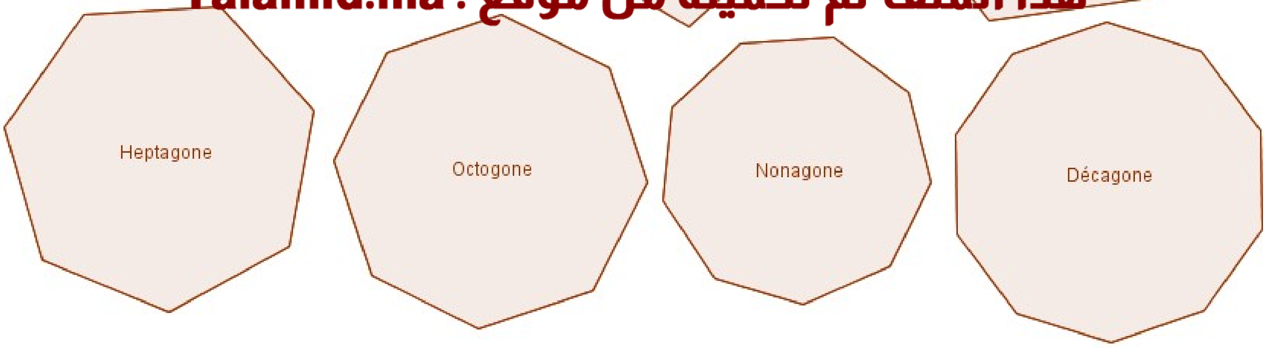
On dit qu'un polygone est **régulier** lorsque tous ses côtés sont de même longueur et tous ses angles formés par deux côtés consécutifs sont de même mesure.

Exemple 6 :
Un pentagone régulier a tous ses côtés de même longueur et tous ses angles formés par deux côtés consécutifs de même mesure.



Exemple 7 :
Voici quelques polygones réguliers bien connus :





B) Propriétés

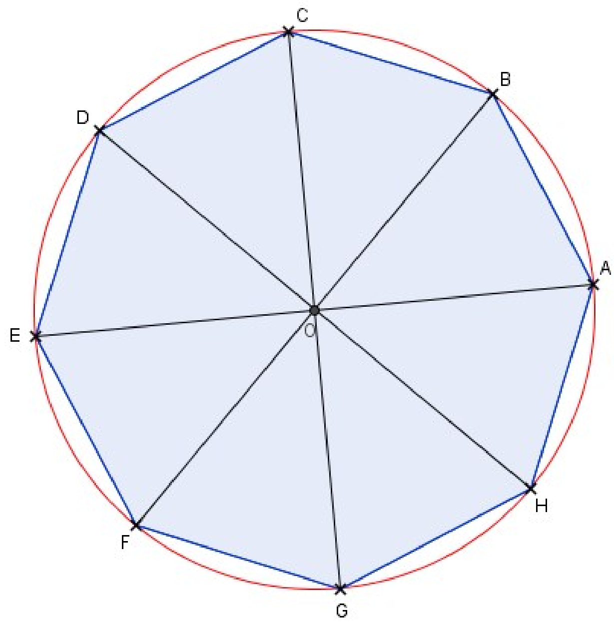
Propriété

Si un polygone est **régulier**, alors il est **inscriptible** dans un cercle.

Cela signifie que tous les sommets d'un polygone régulier appartiennent à un même cercle.

La réciproque de cette propriété est fausse ! Ce n'est pas parce qu'une figure est inscriptible dans un cercle qu'il s'agit d'un polygone régulier. Un triangle est toujours inscriptible dans un cercle mais il n'est pas nécessairement régulier (équilatéral).

Exemple 8 :
Un octogone régulier est inscriptible dans un cercle :



Propriété

Si A et B sont deux sommets consécutifs d'un polygone régulier de centre O possédant n côtés, alors l'angle au centre $\widehat{AOB}$ mesure :
$\widehat{AOB} = \dfrac{360}{n}$

Exemple 9 :
En reprenant l'octogone régulier de l'exemple 8, sachant qu'un octogone a 8 côtés, la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ est égale à :
$\widehat{AOB} = \dfrac{360}{n} = \dfrac{360}{8} = 45°$

Remarque :
Pour construire facilement un polygone régulier, il est préférable de connaître la mesure du rayon du cercle circonscrit ainsi que celle de l'angle au centre.