

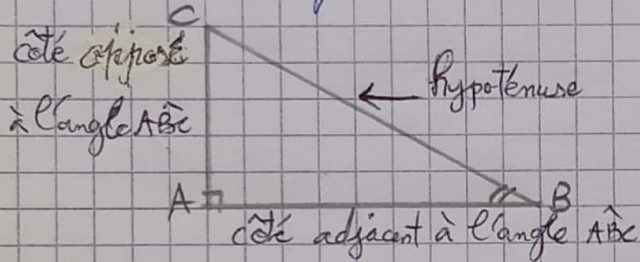
Chapitre 7: Calcul trigonométrique

I. Les rapports trigonométriques d'un angle aigu:

1) Vocabulaire:

ABC est un triangle rectangle en A

On considère l'angle $\hat{A}BC$



* Remarques:

- De même pour l'angle $\hat{A}CB$, le côté adjacent est AC et le côté opposé est AB
- Les deux angles $\hat{A}BC$ et $\hat{A}CB$ sont aigus c-à-d $0^\circ < \hat{A}BC < 90^\circ$ et $0^\circ < \hat{A}CB < 90^\circ$
- L'hypoténuse est le plus grand côté dans un triangle rectangle

2) Définition:

Dans un triangle rectangle ABC en A, les rapports trigonométriques de l'angle $\hat{A}BC$ sont:

* Le rapport $\frac{AB}{BC}$ s'appelle le cosinus de l'angle $\hat{A}BC$ symbolisé par: $\cos \hat{A}BC$

$$\cos \hat{A}BC = \frac{\text{côté adjacent de l'angle } \hat{A}BC}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

* Le rapport $\frac{AC}{BC}$ s'appelle le sinus de l'angle $\hat{A}BC$ symbolisé par $\sin \hat{A}BC$

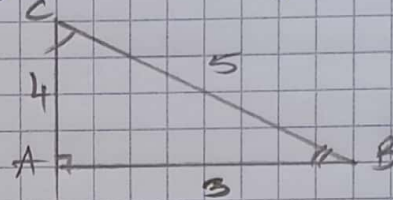
$$\sin \hat{A}BC = \frac{\text{côté opposé de l'angle } \hat{A}BC}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

* Le rapport $\frac{AC}{AB}$ s'appelle la tangente de l'angle $\hat{A}BC$ symbolisé par $\tan \hat{A}BC$.

$$\tan \hat{A}BC = \frac{\text{côté opposé de l'angle } \hat{A}BC}{\text{côté adjacent de l'angle } \hat{A}BC} = \frac{AC}{AB}$$

* Exemple:

ABC un triangle rectangle en A tel que: $AB = 3 \text{ cm}$ et $AC = 4 \text{ cm}$ et $BC = 5 \text{ cm}$
Calculer les rapports trigonométriques de l'angle $\hat{A}BC$ et l'angle $\hat{A}CB$



$$\cos \hat{A}BC = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} = 0,6 \quad \cos \hat{A}CB = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\sin \hat{A}BC = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} = 0,8 \quad \sin \hat{A}CB = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\tan \hat{A}BC = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3} \quad \tan \hat{A}CB = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} = 0,75$$

* Exercice d'application:

ABC est un triangle tel que:

$$AB = 2, \quad AC = 2\sqrt{3}, \quad BC = 4$$

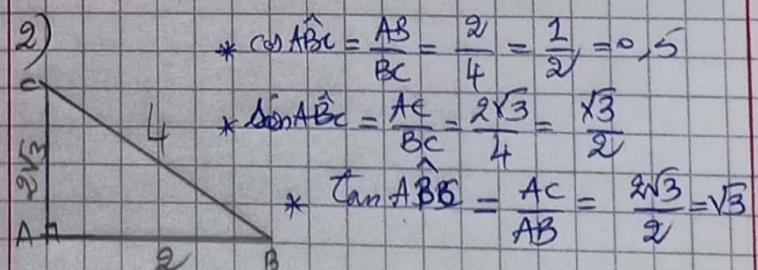
- 1) Montrer que ABC est un triangle rectangle
- 2) Calculer les rapports trigonométriques de $\hat{A}BC$
- 3) Calculer les rapports trigonométriques de $\hat{A}CB$

Solution:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \left\{ \begin{aligned} AB^2 &= 2^2 = 4 \\ AC^2 &= (2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12 \\ BC^2 &= 4^2 = 16 \end{aligned} \right. \\ & \text{On a } AB^2 + AC^2 = 4 + 12 = 16 \\ & \text{donc } AB^2 + AC^2 = BC^2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc d'après le théorème réciproque de Pythagore le triangle ABC est rectangle en A}$$

Donc d'après le théorème réciproque de Pythagore le triangle ABC est rectangle en A



$$\cos \hat{A}BC = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\sin \hat{A}BC = \frac{AC}{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \hat{A}BC = \frac{AC}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

3) Les rapports trigonométriques de $\hat{A}\hat{C}\hat{B}$

$$\cos \hat{A}\hat{C}\hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \hat{A}\hat{C}\hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\tan \hat{A}\hat{C}\hat{B} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3) L'emploi de la calculatrice dans le calcul trigonométrique :

1) En employant la calculatrice, calculons les valeurs approchées des rapports trigonométriques de l'angle $\alpha = 30^\circ$

$$\text{On a } \cos 30^\circ \approx 0,86, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\tan 30^\circ \approx 0,57$$

2) En employant la calculatrice, trouvons les valeurs de l'angle α dont les rapports trigonométriques sont respectivement :

$$\cos \alpha_1 = 0,5, \quad \sin \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan \alpha_3 = 1$$

* En touchant les boutons $\boxed{\text{Shift}} + \boxed{\frac{\cos}{\sin/\tan}}$

$$\text{On trouve : } \alpha_1 = 60^\circ, \quad \alpha_2 = 45^\circ, \quad \alpha_3 = 45^\circ$$

II. Des relations entre les rapports trigonométriques d'un angle aigu :

1) Propo ① : la relation entre le cosinus et le sinus d'un angle droit :

a - Propo ① :

α mesure d'un angle aigu $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

$$\text{On a } 0 < \cos \alpha < 1 \text{ et } 0 < \sin \alpha < 1$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

* Remarques :

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \\ \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \end{cases}$$

(C'est à dire si on sait le cos (sin),

On peut calculer le sin (cos)

$$\Rightarrow \text{On écrit } \cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2 \text{ pas } \cos \alpha^2$$

b - Exemple :

α est mesure d'un angle aigu tel que $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

Calculons $\sin \alpha$

On sait que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \frac{4}{9} = 1$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\text{donc } \sin \alpha = \sqrt{\frac{5}{9}} \text{ car } \sin \alpha > 0$$

$$\text{Ainsi } \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

c - Exercice d'application :

$$A = 2\cos^2 x + 3\sin^2 x - 1$$

$$= 2\cos^2 x + 2\sin^2 x + \sin^2 x - 1$$

$$= 2(\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x - 1$$

$$= 2 + \sin^2 x - 1$$

$$A = 1 + \sin^2 x$$

$$B = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$$

$$= \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x$$

$$= 1 + 1$$

$$B = 2$$

$$C = \sin^4 x - \sin^2 x + \cos^2 x - \cos^4 x$$

$$= \sin^2 x (\sin^2 x - 1) + \cos^2 x (1 - \cos^2 x)$$

$$= -\sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x$$

$$C = 0$$

$$D = \cos^4 x + 2\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$$

$$= (\cos^2 x)^2 + 2\cos^2 x \sin^2 x + (\sin^2 x)^2$$

$$= (\cos^2 x + \sin^2 x)^2$$

$$= 1^2$$

$$D = 1$$

2) Propo ② : la relation entre cosinus et sinus et tangente d'un angle droit

a - Propo ② :

α mesure d'un angle aigu $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

$$\text{On a } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

* Remarques:

$$1) \begin{cases} \sin x = \tan x \cdot \cos x \\ \cos x = \frac{\sin x}{\tan x} \end{cases}$$

2) x angle aigu ma $\tan x > 0$

b - Exemples:

1) x mesure d'angle droit tel que $\tan x = 2\sqrt{2}$

On a $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ donc $2\sqrt{2} = \frac{\sin x}{\cos x}$
 c'ad $\sin x = 2\sqrt{2} \cos x$

$$\begin{aligned} \text{or } \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ (2\sqrt{2} \cos x)^2 + \cos^2 x &= 1 \\ 8 \cos^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ 9 \cos^2 x &= 1 \\ \cos^2 x &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{1}{9}} \quad \text{car } \cos x > 0$$

$$\text{Alors } \boxed{\cos x = \frac{1}{3}}$$

$$\text{or } \sin x = 2\sqrt{2} \cos x$$

$$= 2\sqrt{2} \times \frac{1}{3}$$

$$\text{Alors } \boxed{\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

2) x mesure d'angle aigu tel que $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Calculons $\tan x$

Calculons d'abord $\cos x$

$$\text{On a } \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1$$

$$\cos^2 x + \frac{5}{9} = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{4}{9}} \quad \text{car } \cos x > 0$$

$$\text{Alors } \boxed{\cos x = \frac{2}{3}}$$

$$\text{On a } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

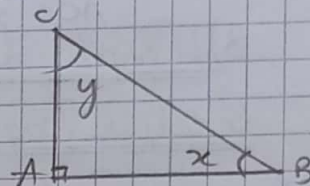
$$\text{Alors } \boxed{\tan x = \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

3) 1 ro (3) : les rapports trigonométriques de deux angles complémentaires

a - Propo (3):

Si x et y les mesures de deux angles complémentaires c'ad $x + y = 90^\circ$ alors

$$\begin{aligned} \cos x &= \sin y \\ \sin x &= \cos y \\ \tan x &= \frac{1}{\tan y} \end{aligned}$$



b - Exemples:

$$\ast \sin 70^\circ = \cos 20^\circ$$

$$\ast \tan 15^\circ = \frac{1}{\tan 75^\circ}$$

$$\ast \cos 30^\circ = \sin 60^\circ$$

$$\ast \sin 80^\circ = \cos 10^\circ$$

$$\ast \tan 11^\circ = \frac{1}{\tan 79^\circ}$$

$$\ast \cos 45^\circ = \sin 45^\circ$$

c - Exercice d'application:

Calculer

$$A = \cos^2 5^\circ + 2 \sin^2 22^\circ - \sin 85^\circ + 2 \sin^2 68^\circ$$

$$B = \cos^2 14^\circ + \cos^2 28^\circ + \cos^2 76^\circ + \cos^2 62^\circ$$

$$C = 5 \sin^2 34^\circ + 3 \cos^2 11^\circ + 5 \sin^2 56^\circ + 3 \cos^2 79^\circ$$

Solution

$$\begin{aligned} A &= \cos^2 5^\circ + 2 \sin^2 22^\circ - \sin 85^\circ + 2 \sin^2 68^\circ \\ &= \cos^2 5^\circ - \cos^2 5^\circ + 2 \sin^2 22^\circ + 2 \cos^2 22^\circ \\ &= 2(\sin^2 22^\circ + \cos^2 22^\circ) \\ &= 2 \times 1 \end{aligned}$$

$$A = 2$$

$$\begin{aligned} B &= \cos^2 14^\circ + \cos^2 28^\circ + \cos^2 76^\circ + \cos^2 62^\circ \\ &= \cos^2 14^\circ + \cos^2 28^\circ + \sin^2 14^\circ + \sin^2 28^\circ \\ &= \cos^2 14^\circ + \sin^2 14^\circ + \cos^2 28^\circ + \sin^2 28^\circ \\ &= 1 + 1 \end{aligned}$$

$$B = 2$$

$$\begin{aligned} C &= 5 \sin^2 34^\circ + 3 \cos^2 11^\circ + 5 \sin^2 56^\circ + 3 \cos^2 79^\circ \\ &= 5 \sin^2 34^\circ + 3 \cos^2 11^\circ + 5 \cos^2 34^\circ + 3 \sin^2 11^\circ \\ &= 5(\sin^2 34^\circ + \cos^2 34^\circ) + 3(\cos^2 11^\circ + \sin^2 11^\circ) \\ &= 5 \times 1 + 3 \times 1 \\ &= 5 + 3 \end{aligned}$$

$$C = 8$$

4) Angles particuliers:

x	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف

Exemple:

$$\begin{aligned}
 C &= \sqrt{2} \cos 45^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ + \sqrt{3} \tan 30^\circ \\
 &= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \\
 &= \frac{2}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{3} \\
 &= 1 + \frac{4}{4} + 1 \\
 &= 2 + 1 \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

$$C = 3$$

Relations Supplémentaires:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \quad \text{et} \quad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

Démonstration:

$$\begin{aligned}
 * \frac{1}{1 + \tan^2 x} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \\
 &= \frac{1}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\cos^2 x}{1} \\
 &= \cos^2 x \\
 * \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} &= \frac{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}{1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \\
 &= \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\sin^2 x}{1} \\
 &= \sin^2 x
 \end{aligned}$$