

Comparaison de deux nombres réels

Règle * Si $a - b \leq 0$ alors $a \leq b$
 * Si $a - b > 0$ alors $a > b$
 c'est-à-dire, pour comparer deux nombres réels, on étudie le signe de leur différence

Exemple $a = \frac{4}{35}$ et $b = \frac{2}{15}$

* $a - b = \frac{4}{35} - \frac{2}{15} = \frac{12 - 14}{105} = \frac{-2}{105}$

Comme $\frac{-2}{105} < 0$ donc $a - b < 0$
 Alors $a < b$

→ Ordre et inverse

Propo ⑤
 a, b positifs
 $a \leq b$ signifie que $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ l'inverse change l'ordre

→ Ordre et carré et racine carrée

Propo ⑥
 a et b positifs
 * $a \leq b$ signifie que $a^2 \leq b^2$
 * $a \leq b$ signifie que $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

* Exemple: $2 < x < 3$ et $-4 < y < -3$

Encadrement de $x+y$
 On a $2 < x < 3$
 $-4 < y < -3$
 $2 + (-4) < x + y < 3 + (-3)$
 $-2 < x + y < 0$

Encadrement de $x-y$
 $-4 < y < -3$
 $3 < -y < 4$
 $2 + 3 < x + (-y) < 3 + 4$
 $5 < x - y < 7$

Encadrement de xy
 $2 < x < 3$
 $3 < -y < 4$
 $2 \times 3 < x(-y) < 3 \times 4$
 $6 < -xy < 12$
 $-12 < xy < -6$

Ordre et opérations

→ ordre et addition

Propo ①
 $a \leq b$ signifie que $a + c \leq b + c$
 $a + c \leq b + c$ signifie que $a \leq b$

Propo ②
 $a \leq b$ signifie que
 $c \leq d$ signifie que $a + c \leq b + d$

→ ordre et multiplication

Propo ③
 * $a \leq b$ et $k > 0$ signifie que $a \times k \leq b \times k$
 * $a \leq b$ et $k < 0$ signifie que $a \times k \geq b \times k$
 La multiplication par un nombre positif ne change pas l'ordre, mais la multiplication par un nombre négatif change l'ordre

Propo ④

a, b, c et d nombres positifs
 $a \leq b$
 $c \leq d$ signifie que $a \times c \leq b \times d$

* Exemples:

Exemple ①: Comparons $2\sqrt{2}$ et $\sqrt{7}$
 On a $(2\sqrt{2})^2 = 8$
 $\sqrt{7}^2 = 7 \Rightarrow \sqrt{7} < 2\sqrt{2}$
 alors $\sqrt{7} < 2\sqrt{2}$

* Exemple ②: Comparons $-2\sqrt{5}$ et $-3\sqrt{2}$
 $(-2\sqrt{5})^2 = 20$
 $(-3\sqrt{2})^2 = 18 \Rightarrow -3\sqrt{2} > -2\sqrt{5}$
 Car $-3\sqrt{2}$ et $-2\sqrt{5}$ négatifs

Encadrement

* Encadrement d'une somme

$a \leq x \leq b$
 $c \leq y \leq d \Rightarrow a + c \leq x + y \leq b + d$

* Encadrement d'opposé

$a \leq x \leq b \Rightarrow -b \leq -x \leq -a$

* Encadrement d'une différence

$a \leq x \leq b$
 $c \leq y \leq d \Rightarrow a - d \leq x - y \leq b - c$
 On a $a - b = a + (-b)$ donc pour encadrer $a - b$
 On encadre d'abord $-b$ après on applique la propo de la somme.

* Encadrement d'un produit

On considère tous les nombres positifs
 $a \leq x \leq b$
 $c \leq y \leq d \Rightarrow a \times c \leq x \times y \leq b \times d$
 tous les nombres doivent être positifs, sinon on encadre l'opposé pour les rendre positifs

* Encadrement d'un inverse

$a \leq x \leq b \Rightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$

* Encadrement d'un quotient

On considère tous les nombres positifs
 $a \leq x \leq b$
 $c \leq y \leq d \Rightarrow \frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$
 On a $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$, pour encadrer $\frac{a}{b}$, on encadre d'abord $\frac{1}{b}$ après on applique la règle du produit