

Chapitre 6: Ordre et opérations

I. Comparaison de deux nombres réels:

1) Activité ①:

Comparer a et b dans chacun des cas suivants:

1) $a = \frac{12}{7}$ et $b = \frac{15}{7}$ 3) $a = \frac{5}{4}$ et $b = \frac{11}{8}$
 2) $a = \frac{15}{14}$ et $b = -\frac{12}{7}$ 4) $a = \frac{6}{5}$ et $b = \frac{6}{11}$

Réponse:

1) On a $15 > 12$ donc $\frac{15}{7} > \frac{12}{7}$
 2) On a $-\frac{12}{7} < 0$ et $\frac{15}{14} > 0$ donc $-\frac{12}{7} < \frac{15}{14}$
 3) On a $a = \frac{5}{4} = \frac{10}{8}$ et $10 < 11$
 donc $\frac{10}{8} < \frac{11}{8}$ alors $\frac{5}{4} < \frac{11}{8}$
 4) On a $5 < 11$ donc $\frac{6}{5} > \frac{6}{11}$

2) Règle ①:

a et b deux nombres réels

* Si $a - b \leq 0$ alors $a \leq b$

* Si $a - b \geq 0$ alors $a \geq b$

C'est à dire, pour comparer deux nombres réels, on étudie le signe de leur différence.

3) Exemples:

1°/ Comparons les nombres $a = \frac{4}{35}$ et $b = \frac{2}{15}$

On a $a - b = \frac{4}{35} - \frac{2}{15} = \frac{12 - 14}{105} = \frac{-2}{105}$

On a $\frac{-2}{105} < 0$ donc $a - b < 0$

Alors $a < b$

2°/ Comparons les nombres $2\sqrt{3} - 4$ et $\sqrt{3} - 5$

On a: $(2\sqrt{3} - 4) - (\sqrt{3} - 5) = 2\sqrt{3} - 4 - \sqrt{3} + 5$
 $= \sqrt{3} + 1$

or $\sqrt{3} + 1 > 0$ donc $(2\sqrt{3} - 4) - (\sqrt{3} - 5) > 0$

Alors $2\sqrt{3} - 4 > \sqrt{3} - 5$

3°/ Comparons x et y tel que $x = y - 3$

On a $x - y = (y - 3) - y = y - 3 - y = -3 < 0$

donc $x - y < 0$ Alors $x < y$

4) Exercice d'application:

Comparer les deux nombres dans chacun des cas:

1) $\frac{12}{7}$ et $\frac{15}{14}$
 2) $7 + \sqrt{2}$ et $-3\sqrt{2} - 1$
 3) $\sqrt{3} - 1$ et $5\sqrt{3} + 4$

Solution

1) On a $\frac{15}{14} - \frac{12}{7} = \frac{15 - 24}{14} = \frac{-9}{14}$

or $\frac{-9}{14} < 0$ donc $\frac{15}{14} - \frac{12}{7} < 0$

Alors $\frac{15}{14} < \frac{12}{7}$

2) On a $(7 + \sqrt{2}) - (-3\sqrt{2} - 1) = 7 + \sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 1$
 $= 4\sqrt{2} + 8$

or $4\sqrt{2} + 8 > 0$ alors $(7 + \sqrt{2}) - (-3\sqrt{2} - 1) > 0$

Donc $7 + \sqrt{2} > -3\sqrt{2} - 1$

3) On a $(5\sqrt{3} + 4) - (\sqrt{3} - 1) = 5\sqrt{3} + 4 - \sqrt{3} + 1$
 $= 4\sqrt{3} + 5$

or $4\sqrt{3} + 5 > 0$ donc $(5\sqrt{3} + 4) - (\sqrt{3} - 1) > 0$

Alors $5\sqrt{3} + 4 > \sqrt{3} - 1$

II - Ordre et opérations:

1) Ordre et addition:

Propo ①:

a, b et c trois nombres réels

* Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$

* Si $a + c \leq b + c$ alors $a \leq b$

* Exemple:

a, b deux nombres réels tel que $a + 4 \leq b$

Montrons que $a + 1 \leq b - 3$

On a $a + 4 \leq b$ donc $a + 4 - 3 \leq b - 3$

Alors $a + 1 \leq b - 3$

b - propo ②:

a, b, c et d des nombres réels
 Si $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases}$ Alors: $a+c \leq b+d$

* Exemple:

a, b deux nombres réels telque
 $a+3 \leq 3$ et $b+4 \leq \sqrt{2}$
 Montrons que $a+b+7 \leq \sqrt{2}+3$
 On a $\begin{cases} a+3 \leq 3 \\ b+4 \leq \sqrt{2} \end{cases}$ donc $a+3+b+4 \leq 3+\sqrt{2}$

Alors $a+b+7 \leq 3+\sqrt{2}$

2) Ordre et multiplication:

a - Activité ②:

a, b et c des nombres réels telque $a \leq b$

- 1) Supposons que $c > 0$ comparons ac et bc
- 2) Supposons que $c < 0$ comparons ac et bc

Solution:

1) On a $ac - bc = c(a-b)$
 or $a \leq b$ donc $a-b \leq 0$
 et $c > 0$ donc $c(a-b) \leq 0$
 c-à-d $ac - bc \leq 0$
 Alors $ac \leq bc$

2) On a $ac - bc = c(a-b)$
 On a $a-b \leq 0$ et $c < 0$
 donc $c(a-b) \geq 0$
 donc $ac - bc \geq 0$
 Alors $ac \geq bc$

b - propo ③

a, b et c des nombres réels

- * Si $a \leq b$ et $c > 0$ donc $axc \leq bxc$
- * Si $a \leq b$ et $c < 0$ donc $axc \geq bxc$

Remarque:

$\Rightarrow$ Si $a \leq b$ alors $-a \geq -b$
 c-à-d l'opposé change l'ordre.

* Exemple:

a et b deux nombres réels telque
 $a \geq \frac{4}{3}$ et $b \geq \sqrt{3}$

Déduisons un ordre de $3a$ et $-2b$

On a $a \geq \frac{4}{3}$ donc $3 \times a \geq 3 \times \frac{4}{3}$
 donc $3a \geq 4$
 on a: $b \geq \sqrt{3}$ donc $-2 \times b \leq -2 \times \sqrt{3}$
 donc $-2b \leq -2\sqrt{3}$

c - propo ④:

a, b, c et d des nombres réels positifs.
 Si $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases}$ Alors: $axc \leq bxd$

* Exemple:

x et y deux nombres réels positifs telque
 $x \leq \sqrt{3}$ et $y \leq 2\sqrt{6}$
 Montrons que $xy \leq 6\sqrt{2}$

On a $\begin{cases} x \leq \sqrt{3} \\ y \leq 2\sqrt{6} \end{cases}$ donc $x \times y \leq \sqrt{3} \times 2\sqrt{6}$
 $xy \leq \sqrt{3} \times 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}$
 $xy \leq 2 \times 3 \times \sqrt{2}$

$\Rightarrow xy \leq 6\sqrt{2}$

d - Exercice d'application:

x et y deux nombres réels telque $x \geq 1$ et $y \geq 2$
 Montrer que $(x-1)(y-2) \geq 0$

Solution:

On a $x \geq 1$ donc $x-1 \geq 0$
 et $y \geq 2$ donc $y-2 \geq 0$
 c-à-d $(x-1)(y-2) \geq 0$

3) Ordre et inverse:

a - propo ⑤:

a et b deux nombres réels strictement positifs.
 Si $a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ et la
 réciproque est vraie
 l'inverse change l'ordre.

b. Exemples:

* On a $2 \leq 4$ donc $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}$

* On a $11 > 5$ donc $\frac{1}{11} < \frac{1}{5}$

c. Exercice d'application:

x un nombre réel tel que $x > 1$

Montrer que $\frac{-5}{x+2\sqrt{3}} > \frac{-5}{1+2\sqrt{3}}$

On a $x > 1$ donc $x+2\sqrt{3} > 1+2\sqrt{3}$

Alors $\frac{1}{x+2\sqrt{3}} < \frac{1}{1+2\sqrt{3}}$

Alors $\frac{-5}{x+2\sqrt{3}} > \frac{-5}{1+2\sqrt{3}}$

4) Autres propriétés : Carré et racine carrée

a - propo ⑥ : Carré

a, b deux nombres réels positifs

* $a \leq b$ est équivalente à $a^2 \leq b^2$

Remarques :

* a, b deux nombres réels négatifs

$\Rightarrow a \leq b$ est équivalente à $a^2 \geq b^2$

* L'ordre change dans les cas suivants:

$\rightarrow$ On multiplie par un nombre négatif (ou opposé)

$\rightarrow$ On fait l'inverse

$\rightarrow$ On prend le carré de deux nombres négatifs

* Exemples:

$\rightarrow$ Comparons 3 et $2\sqrt{2}$

On a $\begin{cases} (2\sqrt{2})^2 = 4 \times 2 = 8 \\ 3^2 = 9 \end{cases}$

donc $(2\sqrt{2})^2 < 3^2$

Alors $2\sqrt{2} < 3$

$\rightarrow$ Comparons $-2\sqrt{5}$ et $-3\sqrt{2}$

On a $(2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$

$(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$

donc $(3\sqrt{2})^2 < (2\sqrt{5})^2$

Alors $3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$ car $-3\sqrt{2} > -2\sqrt{5}$

b. propo ⑦ : Racine Carrée

a, b deux nombres positifs

* Si $a \leq b$ alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

* Si $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ alors $a \leq b$

c. Exercice d'application:

1) Comparer $3\sqrt{3}$ et $4\sqrt{2}$ après $-\sqrt{91}$ et $-6\sqrt{3}$

2) Comparer les nombres $\sqrt{5}+4$ et $\sqrt{3}+4$

Solution:

1) On a $\begin{cases} (3\sqrt{3})^2 = 9 \times 3 = 27 \\ (4\sqrt{2})^2 = 16 \times 2 = 32 \end{cases}$

On a $27 < 32$ donc $(3\sqrt{3})^2 < (4\sqrt{2})^2$

Alors $3\sqrt{3} < 4\sqrt{2}$

* On a $\begin{cases} \sqrt{91}^2 = 91 \\ (6\sqrt{3})^2 = 36 \times 3 = 108 \end{cases}$

On a $91 < 108$ donc $\sqrt{91}^2 < (6\sqrt{3})^2$

Alors $\sqrt{91} < 6\sqrt{3}$

2) On a $\begin{cases} \sqrt{3}^2 = 3 \\ \sqrt{5}^2 = 5 \end{cases}$ donc $\sqrt{3}^2 < \sqrt{5}^2$

$\Rightarrow \sqrt{3} < \sqrt{5}$

Alors $\sqrt{3}+4 < \sqrt{5}+4$

III - Encadrement:

1) Encadrement d'une somme:

* Propo ⑧:

On considère tous les nombres réels positifs

Si $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ Alors $a+c \leq x+y \leq b+d$

* Exemple:

x, y deux nombres réels tel que

$2 \leq x \leq 5$ et $-3 \leq y \leq -1$

Encadrer $x+y$

On a $\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ -3 \leq y \leq -1 \end{cases}$ donc $2+(-3) \leq x+y \leq 5+(-1)$

Alors: $-1 \leq x+y \leq 4$

2) Encadrement d'un opposé:

* Propo ⑨:

x un nombre réel tel que $a \leq x \leq b$

On a $-b \leq -x \leq -a$

* Exemple:

$$\text{Soit } -4 \leq x \leq 3$$

$$\text{On a } -3 \leq -x \leq 4$$

3) Encadrement d'une différence:

* Propo (10):

On considère tous les nombres réels
Si $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ Alors $a-d \leq x-y \leq b-c$

Remarque importante:

$$\text{On a } a-b = a+(-b)$$

Donc pour encadrer $a-b$, on encadre d'abord $-b$ après on applique la propo (8) (De la somme)

* Exemple:

$$x \text{ et } y \text{ deux nombres réels tels que } 3 \leq x \leq 8 \text{ et } -4 \leq y \leq 2$$

Encadrons $x-y$

$$\text{On a } -4 \leq y \leq 2 \text{ donc } -2 \leq -y \leq 4$$

$$\text{On a } \begin{cases} 3 \leq x \leq 8 \\ -2 \leq -y \leq 4 \end{cases} \text{ donc } 3+(-2) \leq x+(-y) \leq 8+4$$

$$\text{Alors } 1 \leq x-y \leq 12$$

4) Encadrement d'un produit:

* Propo (11): On considère tous les nombres réels positifs

$$\text{Si } \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases} \text{ alors } a \times c \leq x \times y \leq b \times d$$

* Exemples:

→ Cas (1): Tous les nombres réels positifs.

$$3 \leq x \leq 7 \text{ et } 1 \leq y \leq 4$$

Encadrons $x \times y$

$$\text{On a } \begin{cases} 3 \leq x \leq 7 \\ 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

$$\text{donc } 3 \times 1 \leq x \times y \leq 7 \times 4$$

$$\text{alors } 3 \leq x \times y \leq 28$$

→ Cas (2): x positif et y négatif

$$4 \leq x \leq 8 \text{ et } -5 \leq y \leq -2$$

Encadrons $x \times y$

D'abord les nombres encadrants y doivent être positifs

$$\text{On a } -5 \leq y \leq -2 \text{ donc } 2 \leq -y \leq 5$$

On a $4 \leq x \leq 8$ Remarquons que tous les $\{2 \leq -y \leq 5\}$ nombres sont positifs

$$\text{donc } 4 \times 2 \leq x \times (-y) \leq 8 \times 5$$

$$8 \leq -x \times y \leq 40$$

Mais ce qui est est $x \times y$ pas

$-x \times y$, donc on se débarrasse du signe -

$$\text{On a } 8 \leq -x \times y \leq 40$$

$$\text{donc } -40 \leq x \times y \leq -8$$

5) Encadrement d'un inverse:

* Propo (12):

x, a et b des nombres réels non nuls tels que $a \leq x \leq b$

$$\text{On a: } \frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$$

* Exemples

$$\text{On a } 2 \leq x \leq 4 \text{ donc } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$$

6) Encadrement d'un quotient:

* Propo (13):

On considère tous les nombres réels positifs

Si $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ tel que $c \neq 0$ et $y \neq 0$ et $d \neq 0$

$$\text{Donc: } \frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$$

* Remarque importante:

$$\text{On a } \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

Donc pour encadrer $\frac{a}{b}$, on encadre d'abord $\frac{1}{b}$ après on applique la propo (11) (produit)

* Exemple:

→ Cas (1): Tous les nombres positifs.

x et y des nombres réels tels que

$$6 \leq x \leq 10 \text{ et } 2 \leq y \leq 3 \text{ Encadrer } \frac{x}{y}$$

On a $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$ donc encadrons d'abord $\frac{1}{y}$

On a $-3 \leq y \leq -2$ donc

On a $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$ donc encadrons d'abord $\frac{1}{y}$

On a $2 \leq y \leq 3$ donc $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$

On a $\begin{cases} 6 \leq x \leq 10 \\ \frac{1}{3} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 6 \times \frac{1}{3} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 10 \times \frac{1}{2}$
 Alors $2 \leq \frac{x}{y} \leq 5$

→ Cas ②: x positif et y négatif

$2 \leq x \leq 5$ et $-4 \leq y \leq -2$

Encadrons $\frac{x}{y}$

On doit transformer les nombres en nombres positifs

On a $-4 \leq y \leq -2$ donc $2 \leq -y \leq 4$

après l'inverse de $-y$

donc $\frac{1}{4} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$

On a $\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ \frac{1}{4} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ donc $2 \times \frac{1}{4} \leq x \times (-\frac{1}{y}) \leq 5 \times \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2} \leq -\frac{x}{y} \leq \frac{5}{2}$

$-\frac{5}{2} \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{1}{2}$

Alors $-\frac{5}{2} \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{1}{2}$

7) Exercices d'application:

* Exercice ①:

$2 \leq a \leq 3$ et $-4 \leq b \leq -3$

→ Encadrement de $a+b$

On a $\begin{cases} 2 \leq a \leq 3 \\ -4 \leq b \leq -3 \end{cases}$ donc $2+(-4) \leq a+b \leq 3+(-3)$
 $-2 \leq a+b \leq 0$

→ Encadrement de $a-b$

On a $-4 \leq b \leq -3$ donc $3 \leq -b \leq 4$

On a $\begin{cases} 2 \leq a \leq 3 \\ 3 \leq -b \leq 4 \end{cases}$ donc $2+3 \leq a+(-b) \leq 3+4$
 $5 \leq a-b \leq 7$

→ Encadrement de ab

On a $\begin{cases} 2 \leq a \leq 3 \\ 3 \leq -b \leq 4 \end{cases}$ donc $2 \times 3 \leq a \times (-b) \leq 3 \times 4$
 $6 \leq -ab \leq 12$

Alors $-12 \leq ab \leq -6$

* Encadrement de $\frac{a}{b}$

On a $3 \leq -b \leq 4$ donc $\frac{1}{4} \leq -\frac{1}{b} \leq \frac{1}{3}$

$\begin{cases} 2 \leq a \leq 3 \\ \frac{1}{4} \leq -\frac{1}{b} \leq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow 2 \times \frac{1}{4} \leq a \times (-\frac{1}{b}) \leq 3 \times \frac{1}{3}$
 $\frac{1}{2} \leq -\frac{a}{b} \leq 1$

Alors $-1 \leq \frac{a}{b} \leq -\frac{1}{2}$

* Exercice ②:

a, b, c trois nombres réels tel que:

$6 \leq a \leq 8$ et $-4 \leq b \leq -2$ et $-3 \leq c \leq 5$

Encadrons $a^2, b^2, a+2b-4c, \frac{a+b}{a^2}$

→ Encadrement de a^2

On a $6 \leq a \leq 8$ donc $6^2 \leq a^2 \leq 8^2$

Alors $36 \leq a^2 \leq 64$

→ Encadrement de b^2

On a $-4 \leq b \leq -2$ donc $(-2)^2 \leq b^2 \leq (-4)^2$

Alors $4 \leq b^2 \leq 16$

→ Encadrement de $a+2b-4c$

On a $-4 \leq b \leq -2$ donc $-8 \leq 2b \leq -4$

On a $-3 \leq c \leq 5$ donc $-20 \leq -4c \leq 12$

On a $6 \leq a \leq 8$

$-8 \leq 2b \leq -4$

$-20 \leq -4c \leq 12$

donc $6-8-20 \leq a+2b-4c \leq 8-4+12$

$-22 \leq a+2b-4c \leq 16$

→ Encadrement de $\frac{a+b}{b^2}$

On a $6 \leq a \leq 8$ donc $6+(-4) \leq a+b \leq 8+(-2)$

$-4 \leq b \leq -2$

$2 \leq a+b \leq 6$

et on a $4 \leq b^2 \leq 16$ donc $\frac{1}{16} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{4}$

On a $2 \leq a+b \leq 6$

$\frac{1}{16} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{4}$

donc $2 \times \frac{1}{16} \leq \frac{a+b}{b^2} \leq 6 \times \frac{1}{4}$

$\frac{1}{8} \leq \frac{a+b}{b^2} \leq \frac{3}{2}$